Def.: Zwei ZV X und Y heißen <u>unkorreliert</u>, falls die <u>Kovarianz von X und Y</u>

$$\mathrm{Kov}(X,Y) := \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\big)$$

gleich 0 ist.

Bem.: (1) Da gilt: $\mathrm{Kov}(X,Y) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\big) =$

$$\mathbb{E}\big(X\cdot Y - \mathbb{E}(X)\cdot Y - X\cdot \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)\big) =$$

$$\mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) =$$

$$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y),$$ folgt:

X und Y sind unkorreliert $\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$

(2) Aus dem entsprechenden Satz über unabh. ZV folgt somit: X und Y unabh. $\Rightarrow$ X und Y unkorreliert

(„$\Leftarrow$" gilt im Allg. <u>nicht</u>: Gegenbsp. ist Bsp. 4)

Beh. ((2) des Satzes): $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\cdot \mathrm{Kov}(X,Y)$

Insbesondere: X, Y unabh. $\Rightarrow$ X,Y unkorreliert $\Rightarrow$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Beweis:

$$V(X+Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X+Y - \underbrace{\mathbb{E}(X+Y)}_{=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)}\big)^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\big((X-\mathbb{E}(X)) + (Y-\mathbb{E}(Y))\big)^2\Big)$$

$$\overset{\text{Bin. Formel}}{=} \underbrace{\mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))^2\big)}_{=V(X)} + 2\cdot \underbrace{\mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\big)}_{=\mathrm{Kov}(X,Y)} + \underbrace{\mathbb{E}\big((Y-\mathbb{E}(Y))^2\big)}_{=V(Y)}$$

Erwartungswert ist linear

$\blacksquare$