Universität Bielefeld
Dr. Guido Elsner
Dr. Holger Kösters

Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 2 (Mengensysteme und Maße)

Aufgabe 8 (Diskrete Maße : 4 + 4 = 8 Punkte)
Es seien Ω eine nicht-leere Menge, $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine beliebige σ-Algebra, $\Omega_0 \subset \Omega$ eine endliche oder abzählbar-unendliche Teilmenge von Ω, $f : \Omega_0 \to [0, \infty]$ eine beliebige Funktion und

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty] \qquad A \mapsto \sum_{\omega \in \mathcal{A} \cap \Omega_0} f(\omega) \,.$$

(Bei der Reihenbildung ist eine beliebige Abzählung von $A \cap \Omega_0$ zugrunde zu legen; da alle Reihenglieder nicht-negativ sind, hängt der Wert der Reihe nicht von der Wahl der Abzählung ab.)

(a) Zeigen Sie, dass μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist. Ein Maß von dieser Form wird auch als *diskretes Maß* bezeichnet; vielleicht kennen Sie solche Maße bereits aus der Stochastik.

(b) Zeigen Sie: Es existiert ein diskretes Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ mit $\mu(A) > 0$ für alle offenen Teilmengen $A \neq \emptyset$ von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 9 (Beispiele für diskrete W.maße : 2 + 2 + 4 = 8 Punkte)
Es seien die Bezeichnungen aus Aufgabe 8 beibehalten; das Maß μ sei aber anders als dort mit $\mathbb{P}$ bezeichnet.

(a) Sei $\Omega = \Omega_0 = \{0, \dots, n\}$, $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $f(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \Omega_0$, wobei $p \in [0, 1]$.
Zeigen Sie, dass das zugehörige Maß $\mathbb{P}$ ein W.maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.
$\mathbb{P}$ heißt *Binomialverteilung mit den Parametern n und p.*

(b) Sei $\Omega = \Omega_0 = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $f(k) := p(1-p)^{k-1}$, $k \in \Omega_0$, wobei $p \in \,]0, 1]$.
Zeigen Sie, dass das zugehörige Maß $\mathbb{P}$ ein W.maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.
$\mathbb{P}$ heißt *geometrische Verteilung mit dem Parameter p.*

(c) Ist $\Omega = \Omega_0$ eine endliche Menge, so ist das durch $f(\omega) := 1/|\Omega_0|$, $\omega \in \Omega_0$, festgelegte Maß $\mathbb{P}$ offenbar ein W.maß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$, welches auch als *Gleichverteilung auf* Ω bezeichnet wird. Dieses W.maß wird zur Beschreibung von Zufallsexperimenten herangezogen, wo alle Ausgänge die gleiche Chance besitzen.
Erläutern Sie, wie man eine Ziehung beim in Deutschland üblichen Lotto „6 aus 49“ (ohne Zusatzzahl / Superzahl) durch ein solches W.maß beschreiben kann, und berechnen Sie die W. dafür, dass bei einer Ziehung die Zahlen 12, 24, 36, 48 gezogen werden.

Aufgabe 10 (Monotone Klassen : 8 Punkte)
Es seien Ω eine Menge $\neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ eine Algebra über Ω und $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ die von $\mathcal{A}$ erzeugte monotone Klasse. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$ gilt, wobei $\sigma(\mathcal{A})$ die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis von Satz 2.7 und Satz 2.9 aus der Vorlesung.

Aufgabe 11 (Äußere Maße : 3 + 3 = 6 Punkte)
Es seien Ω eine Menge $\neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ eine Algebra über Ω und μ das *Dirac-Maß im Punkt* ω auf $(\Omega, \mathcal{A})$ (wobei $\omega \in \Omega$ fest gewählt), also

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 \text{ falls } \omega \in A \\ 0 \text{ falls } \omega \notin A \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{A}) \,.$$

Für eine *beliebige* Teilmenge $A \subset \Omega$ sei

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \textstyle\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{A} \text{ und } A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n \right\} .$$

(a) Zeigen Sie: Existiert eine Folge $(A_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ von Mengen $A_n^* \in \mathcal{A}$ mit $\bigcap_{n=1}^\infty A_n^* = \{\omega\}$, so ist μ^* das Dirac-Maß in ω auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. Insbesondere ist μ^* also ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$.

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels: Im Allgemeinen (d. h. ohne die Zusatzvoraussetzung in Teil (a)) ist μ^* kein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$.

Abgabe: Mittwoch, 28. Oktober 2009, im Fach Ihres Tutors / Ihrer Tutorin