Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 3 (Konstruktion von Maßen)

Aufgabe 12 (Fixpunkte zufälliger Permutationen : 2 + 2 + 4 + 2 = 10 Punkte)

Es seien $N \in \mathbb{N}$ beliebig und $\Omega_N := \mathcal{S}_N$ die Menge der Permutationen der Zahlen $\{1, \dots, N\}$. Es wird „rein zufällig“ eine Permutation ausgewählt, d. h. jede Permutation hat die gleiche Chance, ausgewählt zu werden. Wir interessieren uns für die Fixpunkte einer solchen zufälligen Permutation. Dazu sei für jede Teilmenge $I \subset \{1, \dots, N\}$

$$A_{N,I} := \{\pi \in \mathcal{S}_N : \pi(i) = i \text{ für alle } i \in I\} \subset \mathcal{S}_N$$

die Menge der Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_N$, für die alle Elemente in I *Fixpunkte* von π sind, und

$$B_N := \{\pi \in \mathcal{S}_N : \pi(i) \neq i \text{ für alle } i = 1, \dots, N\} \subset \mathcal{S}_N$$

die Menge der Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_N$ ohne Fixpunkte.

- Beschreiben Sie die Situation durch einen W.Raum $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathbb{P}_N)$. (*Hinweis:* Aufgabe 9)
- Begründen Sie: $\mathbb{P}_N(A_{N,I}) = (N - |I|)! / N!$.
- Berechnen Sie $\mathbb{P}_N(B_N)$. (*Hinweis:* Aufgabe 7)
- Zeigen Sie: $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_N(B_N) = e^{-1}$.

Aufgabe 13 (Verteilungsfunktionen : 4 + 0 + 4 + 2 = 10 Punkte)

Es bezeichne $\mathcal{B}$ die Borel'sche σ -Algebra auf $\mathbb{R}$. Eine Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Verteilungsfunktion*, wenn sie monoton wachsend und rechtsseitig stetig ist und $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ gilt.

- Zeigen Sie: Ist $\mathbb{P}$ ein W.maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so ist $F_{\mathbb{P}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F_{\mathbb{P}}(x) := \mathbb{P}([-\infty, x])$ ($x \in \mathbb{R}$) eine Verteilungsfunktion.
- Wichtiger Hinweis:* Zu dieser Teilaufgabe ist nichts abzugeben!

Die Konstruktion des gewöhnlichen Lebesgue-Maßes kann wie folgt verallgemeinert werden: Es seien $\mathcal{I} := \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R} := \mathcal{R}(\mathcal{I})$ der von $\mathcal{I}$ erzeugte Ring und $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktion. Es lässt sich dann zeigen, dass durch $\mu_F : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\mu_F \left(\bigcup_{i=1}^n]a_i, b_i[\right) := \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i)) \quad (]a_i, b_i[\in \mathcal{I} \text{ paarweise disjunkt})$$

ein wohldefinierter Inhalt μ_F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ gegeben ist. μ_F ist sogar ein (σ -endliches) Prämaß; nach dem Satz von Carathéodory existiert daher eine eindeutige Fortsetzung zu einem Maß $\tilde{\mu}_F$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. μ_F heißt auch *Lebesgue-Stieltjes-Inhalt* zu F , $\tilde{\mu}_F$ *Lebesgue-Stieltjes-Maß* zu F . Für $F(x) := x$ erhält man offenbar den gewöhnlichen Lebesgue-Inhalt bzw. das gewöhnliche Lebesgue-Maß (aus der Vorlesung) zurück.

Ist F sogar eine Verteilungsfunktion, so ist $\tilde{\mu}_F$ ein W.maß, das wir auch mit $\mathbb{P}_F$ bezeichnen. Damit ist Folgendes gezeigt: Zu jeder Verteilungsfunktion F existiert ein W.maß $\mathbb{P}_F$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $\mathbb{P}_F(]a, b]) = F(b) - F(a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

- Zeigen Sie: Die Abbildungen $\mathbb{P} \mapsto F_{\mathbb{P}}$ und $F \mapsto \mathbb{P}_F$ aus Teil (a) bzw. Teil (b) sind zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge der W.maße / W.verteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und der Menge der Verteilungsfunktionen.
- Bestimmen Sie $F_{\mathbb{P}}$ für das W.maß $\mathbb{P} = \frac{1}{4}\varepsilon_{-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{1}{4}\varepsilon_{+1}$.

Aufgabe 14 (Äußere Maße : 3 + 4 + 3 = 10 Punkte)

Es seien $\mathcal{R}$ der Ring aus Aufgabe 13 (b) und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ der gewöhnliche Lebesgue-Inhalt. Für eine beliebige Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(A) &:= \{(A_n)_{n \in \mathbb{N}} : A_n \in \mathcal{R} \text{ und } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\} && \text{(abzählbar-unendliche Überdeckungen)} \\ \mu^*(A) &:= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A) \right\} && \text{(wobei } \inf \emptyset := +\infty\text{)}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(A) &:= \{(A_n)_{n=1, \dots, N} : N \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{R} \text{ und } A \subset \bigcup_{n=1}^N A_n\} && \text{(endliche Überdeckungen)} \\ \mu^\#(A) &:= \inf \left\{ \sum_{n=1}^N \mu(A_n) : (A_n)_{n=1, \dots, N} \in \mathcal{V}(A) \right\} && \text{(wobei } \inf \emptyset := +\infty\text{)}.\end{aligned}$$

Dann ist μ^* ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}$ (siehe Vorlesung).

- (a) Zeigen Sie: $\mu^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$.
- (b) Zeigen Sie: $\mu^\#(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$.
- (c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (b): $\mu^\#$ ist kein äußeres Maß auf $\mathbb{R}$.

Abgabe: Mittwoch, 04. November 2009, im Fach Ihres Tutors / Ihrer Tutorin