Universität Bielefeld Wintersemester 2009/2010
Dr. Guido Elsner
Dr. Holger Kösters

Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 4 (Cantor-Verteilung / Unabhängigkeit)

Aufgabe 15 (Cantor-Verteilung : 2 + 3 + 4 + 3 = 12 Punkte)
Bekanntlich besitzt jede Zahl $x \in [0,1]$ eine Entwicklung $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 3^{-n}$ mit $\alpha_n \in \{0,1,2\}$ (wobei die Entwicklung aber nicht immer eindeutig ist). Die Menge

$$C := \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 3^{-n} \text{ mit } \alpha_n \in \{0,2\} \right\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k \in \mathcal{Z}(m)} \left[\tfrac{k}{3^m} ; \tfrac{k+1}{3^m} \right]$$

heißt *Cantor-Menge*, wobei $\mathcal{Z}(m) := \left\{ k \in \mathbb{Z} : k = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n 3^{m-n} \text{ mit } \alpha_n \in \{0,2\} \right\}$.
Ist $x \in C$, etwa $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 3^{-n}$ mit $\alpha_n \in \{0,2\}$, so sei

$$F_0(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n/2)\, 2^{-n}$$

gesetzt. Dies liefert eine wohldefinierte monoton wachsende Funktion $F_0 : C \to [0,1]$.

(a) Begründen Sie (möglichst kurz): Die Menge C ist überabzählbar und kompakt.

(b) Zeigen Sie: Es gilt $\lambda(C) = 0$, $\lambda([0,1] \setminus C) = 1$, wobei λ das Lebesgue-Maß ist.

(c) Zeigen Sie: Die Funktion F_0 lässt sich eindeutig zu einer monoton wachsenden stetigen Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ fortsetzen.

(d) Zeigen Sie: Es gilt $\mu(C) = 1$, $\mu([0,1] \setminus C) = 0$, wobei μ das Lebesgue-Stieltjes-Maß zu F ist.

Die Funktion F heißt *Cantor-Funktion*, und das Wahrscheinlichkeitsmaß μ heißt *Cantor-Verteilung*.

Aufgabe 16 (Unabhängigkeit I : 6 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ eine Familie unabhängiger und $\cap$-stabiler Teilsysteme von $\mathcal{F}$. Weiter sei $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ eine Zerlegung von I in paarweise disjunkte Mengen I_j. Zeigen Sie, dass die Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \in J}$ mit $\mathcal{F}_j := \mathcal{A}(\bigcup_{i \in I_j} \mathcal{E}_i)$, $j \in J$, unabhängig ist.

Aufgabe 17 (Unabhängigkeit II : jeweils 3 = 6 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $n \geq 3$ eine fest gewählte natürliche Zahl. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sind $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ Teilsysteme von $\mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n)$ für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n$, so sind $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ $\mathbb{P}$-unabhängig.

(b) Sind $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ Unter-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n)$ für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n$, so sind $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ $\mathbb{P}$-unabhängig.

Aufgabe 18 (Unabhängigkeit III : jeweils 3 = 6 Punkte)
Es seien $n \geq m \geq 2$ und

$$\Omega := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{N}^m : x_1, \ldots, x_m \in \{1, \ldots, n\}\},$$
$$\Omega' := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{N}^m : x_1, \ldots, x_m \in \{1, \ldots, n\} \text{ paarweise verschieden}\}.$$

Betrachte auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ die Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\mathbb{P} := \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} \varepsilon_\omega \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Q} := \frac{1}{|\Omega'|} \sum_{\omega \in \Omega'} \varepsilon_\omega .$$

Untersuchen Sie die Ereignisse $A_i := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega : x_i = 1\} \in \mathfrak{P}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, m$,

(a) auf $\mathbb{P}$-Unabhängigkeit,

(b) auf $\mathbb{Q}$-Unabhängigkeit.

Wie lassen sich Ihre Ergebnisse anschaulich begründen?

Abgabe: Mittwoch, 11. November 2009, im Fach Ihres Tutors / Ihrer Tutorin