Universität Bielefeld
Dr. Guido Elsner
Dr. Holger Kösters

Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 5 (Unabhängigkeit / Messbarkeit)

Aufgabe 19 (Erzeugendensysteme : 4 Punkte)
Es seien $f : \Omega \to \Omega'$ eine beliebige Abbildung und $\mathcal{E}' \subset \mathfrak{P}(\Omega')$ ein System von Teilmengen von Ω'. Zeigen Sie: $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}')) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}'))$.

Aufgabe 20 (Messbarkeit : 6 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion und D eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. f ist $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$-messbar.
2. Für alle $\alpha \in D$ gilt $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$.
3. Für alle $\alpha \in D$ gilt $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(Dabei bezeichne $\overline{\mathcal{B}}$ wie üblich die Borel'sche σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$.)

Aufgabe 21 (Dezimalbruchentwicklung : jeweils 4 = 8 Punkte)
Es seien $x \in [0, 1[$ „rein zufällig“ gewählt und $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, 10^{-n}$ mit $x_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ die Dezimalbruchentwicklung von x. (Wenn die Dezimalbruchentwicklung nicht eindeutig ist, betrachte diejenige mit $x_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.) Dieses Zufallsxperiment lässt sich durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\Omega := [0, 1[$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}\big|_{[0,1[}$, $\mathbb{P} := \lambda\big|_{[0,1[}$ beschreiben. ($\mathbb{P}$ heißt auch *Gleichverteilung* auf Ω.) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die jedem $x \in [0, 1[$ die n-te Nachkommastelle (also den Koeffizienten x_n) in der Dezimalbruchentwicklung von x zuordnet.

(a) Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unabhängige Familie von Zufallsgrößen ist.

Hinweis: Warum genügt es zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k_1, \ldots, k_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ $\{X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n\} \in \mathcal{A}$ sowie $\mathbb{P}(\{X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n\}) = 10^{-n}$ gilt?

(b) Zeigen Sie: $\mathbb{P}\left(\left\{ x \in \Omega \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{jede Ziffer } k \in \{0,1,2,\ldots,9\} \text{ kommt unendlich oft} \\ \text{in der Dezimalbruchentwicklung von } x \text{ vor} \end{array} \right\}\right) = 1.$

Aufgabe 22 (limsup und liminf : jeweils 3 = 6 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Mengen.

(a) Zeigen Sie: $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \geq \mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n)$.

(b) Geben Sie (z. B. mit Hilfe von Aufgabe 21) ein Beispiel an, wo in der Ungleichungskette aus Teil (a) an jeder Stelle die Ungleichheit eintritt.

Aufgabe 23 (Bildmaße : 6 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}|_{[0,1]}, \lambda|_{[0,1]})$; $\mathbb{P}$ heißt dann auch *Gleichverteilung* über dem Intervall $[0, 1]$. Es seien weiter $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ die Verteilungsfunktion eines beliebigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $G(x) := \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y) \geq x\}$, $x \in [0, 1]$, die sog. Pseudo-Inverse zu F. (Dabei ist $\inf \emptyset := +\infty$ und $\inf \mathbb{R} := -\infty$ zu setzen.) Zeigen Sie, dass das Bildmaß $\mathbb{P}_G$ gerade $\mathbb{Q}$ ist.

Hinweis: Wenn Ihnen die Aufgabe zu schwierig erscheint, bearbeiten Sie sie unter der Zusatzvoraussetzung, dass F bijektiv und (somit) G die Umkehrfunktion zu F ist!

Abgabe: Mittwoch, 18. November 2009, im Fach Ihres Tutors / Ihrer Tutorin