Universität Bielefeld
Dr. Guido Elsner
Dr. Holger Kösters

Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 6 (Integration)

Aufgabe 24 (Maße mit Dichten : jeweils 4 = 8 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $h : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine messbare Funktion mit $h \geq 0$. Zeigen Sie:

(a) Durch $\nu(A) := \int_A h \, d\mu$, $A \in \mathcal{B}$, wird ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert.

(b) Für jede messbare Funktion $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ gilt $\int f \, d\nu = \int f \, h \, d\mu$ (in dem Sinne, dass die linke Seite existiert g.d.w. die rechte Seite existiert und dann Gleichheit vorliegt).

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis der Transformationsformel in der Vorlesung.

Man nennt ν das Maß mit der Dichte h bezüglich des Maßes μ (oder kürzer mit der μ-Dichte h). Besonders wichtig für Anwendungen sind die folgenden Spezialfälle:

- Ist μ das Zählmaß auf einer endlichen oder abzählbar-unendlichen Teilmenge $\Omega_0 \subset \Omega$, so gilt (im Falle der Existenz des Integrals auf der linken Seite)

$$\int_\Omega f \, d\nu = \sum_{\omega \in \Omega_0} f(\omega) \, h(\omega) \,,$$

wobei rechts eine endliche Summe bzw. eine unendliche Reihe steht.

- Ist μ das Lebesgue-Maß auf einem beschränkten oder unbeschränkten Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ und sind h und f stetig, so gilt (im Falle der Existenz des Integrals auf der linken Seite)

$$\int_{(a,b)} f \, d\nu = \int_a^b f(x) \, h(x) \, dx \,,$$

wobei rechts ein eigentliches bzw. uneigentliches Riemann-Integral steht.

(Der Zusammenhang zwischen Lebesgue-Integral und Riemann-Integral wird in der Vorlesung noch besprochen; Sie dürfen / müssen die obige Formel aber bereits verwenden.)

Aufgabe 25 (Erwartungswert und Varianz : jeweils 3 = 12 Punkte)
Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße X (auf irgendeinem W.raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$), deren Verteilung durch

(a) die *Bernoulli-Verteilung* mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$, d. h. die Verteilung auf $\{0, \ldots, n\}$ mit der Dichte $h(k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}$ bzgl. des Zählmaßes auf $\{0, \ldots, n\}$

(b) die *Poisson-Verteilung* mit Parameter $\alpha > 0$, d. h. die Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ mit der Dichte $h(k) = e^{-\alpha} \alpha^k / k!$ bzgl. des Zählmaßes auf $\mathbb{N}_0$

(c) die *Gleichverteilung* auf dem Intervall $[a, b]$ (wobei $-\infty < a < b < +\infty$), d.h. die Verteilung auf $[a, b]$ mit der Dichte $h(x) = \frac{1}{b-a}$ bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $[a, b]$

(d) die *Exponentialverteilung* mit Parameter $\lambda > 0$, d. h. die Verteilung auf $(0, \infty)$ mit der Dichte $h(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $(0, \infty)$

gegeben ist.

Aufgabe 26 (Charakterisierung σ-endlicher Maße : 5 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Zeigen Sie, dass das Maß μ genau dann σ-endlich ist, wenn eine μ-integrierbare Funktion $f : \Omega \to (0, \infty)$ existiert.

Aufgabe 27 (Charakterisierung μ-fast überall gleicher Funktionen : 5 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei μ-integrierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass f, g genau dann μ-fast überall gleich sind, wenn für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$$

gilt.

Abgabe: Mittwoch, 25. November 2009, im Fach Ihres Tutors / Ihrer Tutorin