Universität Bielefeld
Dr. Guido Elsner
Dr. Holger Kösters

Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 7 (Maße mit Dichten, Konvergenzarten)

Aufgabe 28 (Transformation von Dichten : jeweils 3 = 6 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $\mathbb{Q}$ ein W.maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, dessen Verteilungsfunktion F stetig differenzierbar ist, so ist die Ableitungsfunktion F' eine Dichte von $\mathbb{Q}$ bezüglich des Lebesgue-Maßes λ.

(b) Zeigen Sie: Ist X eine reelle Zufallsgröße, deren Verteilung die stetige λ-Dichte $f(x)$ besitzt, und sind $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist $Y := aX + b$ eine reelle Zufallsgröße, deren Verteilung die stetige λ-Dichte $g(y) = \frac{1}{|a|} f(\frac{y-b}{a})$ besitzt.

Aufgabe 29 (Normalverteilung : jeweils 3 = 9 Punkte)

Für alle $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in (0, \infty)$ heißt das W.maß $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit der λ-Dichte

$$h(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Normalverteilung mit den Parametern μ und σ^2; $\mathcal{N}(0, 1)$ heißt auch *Standard-Normalverteilung.* (Dass h tatsächlich eine W.Dichte ist, also die Normierungsbedingung $\int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\lambda(x) = 1$ erfüllt, dürfen Sie voraussetzen und verwenden.)

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der $\mathcal{N}(0, 1)$-Verteilung.

(b) Zeigen Sie: Ist X $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt und sind $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist $Y := aX + b$ $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$-verteilt.

(c) Berechnen Sie möglichst geschickt den Erwartungswert und die Varianz der $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung.

Aufgabe 30 (Konvergenzarten : 6 + 3 = 9 Punkte)

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger reeller Zufallsgrößen (auf irgendeinem W.raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) mit $\mathbb{P}(X_n = n^b) = n^{-a} = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $a, b \in (0, \infty)$ beliebig.

(a) Untersuchen Sie, für welche Paare (a, b) die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(i) $\mathbb{P}$-stochastisch (ii) in $L^1(\mathbb{P})$ (iii) $\mathbb{P}$-fast sicher

gegen $X_0 \equiv 0$ konvergiert.

(b) Untersuchen Sie, für welche Paare (a, b) die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar ist.

Aufgabe 31 („Fast gleichmäßige Konvergenz“ : 6 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Zeigen Sie, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ existiert, so dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A_ε^c gleichmäßig gegen f konvergiert.

Hinweis: Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ sei $\Omega_{k,l} := \bigcup_{n=l}^{\infty} \{|f_n - f| \geq 1/k\}$. Zeigen Sie, dass zu jeder Zahl $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $l(k) \in \mathbb{N}$ mit $\mu(\Omega_{k,l(k)}) \leq \varepsilon\, 2^{-k}$ existiert, und setzen Sie $A_\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_{k,l(k)}$.

Abgabe: Mittwoch, 2. Dezember 2009, im Fach Ihres Tutors / Ihrer Tutorin