Universität Bielefeld
Dr. Guido Elsner
Dr. Holger Kösters

Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 8 (Maße mit Dichten, Konvergenzsätze, Konvergenzarten)

Aufgabe 32 (Transformation von Dichten : 6 + 3 + 3 = 12 Punkte)
Es seien $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\mathbb{P}$ ein W.maß auf $(\mathbb{R}|_I, \mathcal{B}|_I)$, $T : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\mathbb{P}_T$ die induzierte Verteilung.

(a) Zeigen Sie: Hat $\mathbb{P}$ eine stetig Lebesgue-Dichte $f : I \to \mathbb{R}$ und ist $T : I \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig differenzierbar, so dass auch die „Umkehrfunktion" $T^{-1} : T(I) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, so hat $\mathbb{P}_T$ eine stetige Lebesgue-Dichte g, nämlich

$$g(y) = f(T^{-1}(y)) \left| \frac{dT^{-1}}{dy}(y) \right| \mathbf{1}_{T(I)}(y)\,.$$

Bemerkung: Eine ähnliche Aussage gilt, wenn die Voraussetzungen nur stückweise erfüllt sind: Es seien $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ endlich viele Punkte, $I_k := (t_{k-1}, t_k)$, $f_k := f|I_k$, $T_k := T|_{I_k}$, $k = 1, \ldots, n$. Erfüllen f_k bzw. T_k die o.g. Voraussetzungen an f bzw. T, so gilt

$$g(y) = \sum_{k=1}^{n} f(T_k^{-1}(y)) \left| \frac{dT_k^{-1}}{dy}(y) \right| \mathbf{1}_{T(I_k)}(y)\,.$$

Diese Verallgemeinerung dürfen / müssen Sie im Folgenden verwenden.

(b) Bestimmen Sie g für den Fall, dass $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ und $T(x) = \tan x$ ist, und bestimmen Sie den Erwartungswert von $\mathbb{P}_T$ (falls existent).

(c) Bestimmen Sie g für den Fall, dass $\mathbb{P}$ die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}$ und $T(x) = x^2$ ist, und bestimmen Sie den Erwartungswert von $\mathbb{P}_T$ (falls existent).

Aufgabe 33 (Gamma-Funktion : 3 + 2 + 3 = 8 Punkte)
Die Gamma-Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_{(0,\infty)} t^{x-1}\, e^{-t}\, \lambda\!\!\lambda(dt) \qquad (x > 0)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Integral für alle $x > 0$ existiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Gamma-Funktion stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Gamma-Funktion unendlich oft differenzierbar ist, wobei

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_{(0,\infty)} (\log t)^k\, t^{x-1}\, e^{-t}\, \lambda\!\!\lambda(dt) \qquad (x > 0)\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannten Sätze über parameterabhängige Integrale.

Aufgabe 34 (Charakterisierung der stochastischen Konvergenz : 5 + 5 = 10 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, wobei μ ein endliches Maß ist. Auf der Menge Z der messbaren reellwertigen Funktionen wird durch $X \sim Y \;\Leftrightarrow\; X = Y$ μ-fast überall offenbar eine Äquivalenzrelation definiert. Bezeichne $\mathcal{Z}$ den Quotientenraum $Z / \sim$. Für $f, g \in \mathcal{Z}$ sei

$$d(f, g) := \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|}\, d\mu\,;$$

dabei unterscheiden wir – wie in der Maßtheorie üblich – nicht zwischen den Restklassen in $\mathcal{Z}$ und ihren Repräsentanten in Z.

(a) Überprüfen Sie, dass $(\mathcal{Z}, d)$ ein metrischer Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{Z}$ gilt:

$$f_n \to f_0 \ \mu\text{-stochastisch} \qquad \Leftrightarrow \qquad d(f_n, f_0) \to 0\,.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass für $a, b \geq 0$ $\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ und $a < b \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$ gilt.

Abgabe: Mittwoch, 9. Dezember 2009, im Fach Ihres Tutors / Ihrer Tutorin