Universität Bielefeld
Dr. Guido Elsner
Dr. Holger Kösters

Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 9 (Produkträume, Produktmaße, Satz von Fubini)

Aufgabe 35 (Produkt-σ-algebra : 6 Punkte)
Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von messbaren Räumen, und sei $(\Omega, \mathcal{A}) := \left(\bigotimes_{i\in I} X_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i\right)$ das Produkt versehen mit der Produkt-σ-algebra. Dies ist wieder ein messbarer Raum. Sei $(X_i)_{i\in I}$ die Familie der Projektionen.
Sei $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein weiterer messbarer Raum, und sei $f : \Omega' \to \Omega$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann $(\mathcal{A}', \mathcal{A})$-messbar ist, wenn für jedes $i \in I$ die Abbildung $f_i := X_i \circ f$ $(\mathcal{A}', \mathcal{A}_i)$-messbar ist.

Aufgabe 36 (Lebesgue-Integral und Flächeninhalt : jeweils 3 = 6 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion und $M := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \le t < f(\omega)\}$. Zeigen Sie:

(a) f ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar genau dann, wenn $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Hinweis: Verwenden Sie (für die Richtung „$\Rightarrow$“) u. a. die Hilfsfunktion $h(\omega, t) := f(\omega) - t$.

(b) Ist f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar, so gilt $\int_\Omega f(x)\,\mu(dx) = (\mu \otimes \lambda\!\!\!\lambda)(M)$. ($\lambda\!\!\!\lambda :=$ Lebesgue-Borel-Maß)

Hinweis: Berechnen Sie $(\mu \otimes \lambda\!\!\!\lambda)(M)$ mit Hilfe des Satzes von Fubini.

Insbesondere gilt also im Fall $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}|_I, \mathcal{B}|_I, \lambda\!\!\!\lambda|_I)$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist: Das Lebesgue-Integral misst gerade den Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen.

Aufgabe 37 (Gegenbeispiele zum Satz von Fubini : jeweils 4 = 8 Punkte)
Es seien $\lambda\!\!\!\lambda$ das Lebesgue-Borel-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und μ das Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (d. h. es sei $\mu(A) := |A|$, falls A endlich, und $\mu(A) := \infty$, falls A unendlich).

(a) Begründen Sie (möglichst kurz), dass die folgende Funktion Borel-messbar ist:

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie außerdem, dass $\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)\, \lambda\!\!\!\lambda(dy)\, \lambda\!\!\!\lambda(dx) \neq \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)\, \lambda\!\!\!\lambda(dx)\, \lambda\!\!\!\lambda(dy)$.
Warum steht dies nicht im Widerspruch zum Satz von Fubini?

Hinweis: Es gilt $f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \arctan(x/y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \arctan(x/y)$, falls $y \neq 0$.

(b) Begründen Sie (möglichst kurz), dass die folgende Funktion Borel-messbar ist:

$$g : [0,1]^2 \to \mathbb{R} \quad g(x,y) := \begin{cases} 1 & ; x = y \\ 0 & ; x \neq y \end{cases}$$

Zeigen Sie außerdem, dass $\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} g(x,y)\, \mu(dy)\, \lambda\!\!\!\lambda(dx) \neq \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} g(x,y)\, \lambda\!\!\!\lambda(dx)\, \mu(dy)$.
Warum steht dies nicht im Widerspruch zum Satz von Fubini?

Aufgabe 38 (Zufallsvektoren mit Dichten : 2 + 8 = 10 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ und $(\Omega'', \mathcal{A}'')$ zwei messbare Räume und $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\Omega' \times \Omega'', \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}'')$ eine Zufallsgröße mit Werten in $\Omega' \times \Omega''$. Dann sind X und Y (nach Aufgabe 35) Zufallsgrößen mit Werten in Ω' bzw. Ω'', und die beiden Bildmaße $\mathbb{P}_X$ und $\mathbb{P}_Y$ auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ bzw. $(\Omega'', \mathcal{A}'')$ heißen auch *Randverteilungen* oder *Marginalverteilungen* von (X, Y).
Es seien weiter μ' und μ'' σ-endliche Maße auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ bzw. $(\Omega'', \mathcal{A}'')$, und es sei vorausgesetzt, dass (X, Y) bzgl. des Produktmaßes $\mu' \otimes \mu''$ eine Dichte f besitzt (vgl. dazu Aufgabe 24), d. h. es existiere eine messbare Funktion $f : (\Omega' \times \Omega'', \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}'') \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_+)$ mit

$$\mathbb{P}((X, Y) \in C) = \int_C f(x,y)\, d(\mu' \otimes \mu'')(x,y)$$

für alle $C \in \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}''$.

(a) Zeigen Sie: X und Y besitzen bzgl. der Maße μ' bzw. μ'' die Dichten

$$f_X(x) := \int_{\Omega''} f(x,y)\, d\mu''(y) \quad (x \in \Omega') \qquad \text{bzw.} \qquad f_Y(y) := \int_{\Omega'} f(x,y)\, d\mu'(x) \quad (y \in \Omega'')$$

(d. h. es wird jeweils bezüglich der anderen Variablen „ausintegriert“).

(b) Die Verteilung von (X,Y) sei speziell durch die Gleichverteilung auf der Einheitskreisscheibe $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ gegeben, d. h. der Zufallsvektor $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$ besitze (für geeignetes $c > 0$) die Dichte $f(x,y) := c \cdot \mathbf{1}_B(x,y)$ bezüglich des Maßes $\lambda\!\!\lambda^2$. (Hier ist also $(\Omega', \mathcal{A}', \mu') = (\Omega'', \mathcal{A}'', \mu'') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda\!\!\lambda)$.)

Bestimmen Sie $c > 0$ so, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, bestimmen Sie die Marginalverteilungen, und berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X bzw. Y sowie die Kovarianz von X und Y. Entscheiden Sie außerdem, ob X und Y unabhängig sind.

Hinweis: Nutzen Sie die vorhandenen Symmetrien aus, um sich die Arbeit ein wenig zu vereinfachen.

Abgabe: Mittwoch, 16. Dezember 2009, im Fach Ihres Tutors / Ihrer Tutorin