

Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 10 (Integration; endliche und unendliche Produkträume)

Aufgabe 39 (Integrationsformeln : jeweils 4 = 8 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- (a) Zeigen Sie: Ist X eine Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{N}_{\geq 0}$, so gilt $\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.

Hinweis: Schreiben Sie $X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X(\omega) \geq n\}}$ und ordnen Sie um.

- (b) Zeigen Sie: Ist X eine Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{R}_{\geq 0}$, so gilt $\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq t) dt$.

Hinweis: Schreiben Sie $X(\omega) = \int_{[0, \infty]} \mathbf{1}_{\{X(\omega) \geq t\}} \mathbb{A}(dt)$ und ordnen Sie um.

Aufgabe 40 (Zufällige Dezimalbrüche : 6 Punkte)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsgrößen, wobei die Verteilung jeder Zufallsgröße X_n die Gleichverteilung auf der Menge $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ist. Sei

$$Y := \sum_{k=1}^{\infty} X_k 10^{-k}.$$

Begründen Sie, dass Y wieder eine Zufallsgröße ist, und bestimmen Sie die Verteilung von Y .
(*Hinweis:* Wie hängt diese Aufgabe mit Aufgabe 21 zusammen?)

Aufgabe 41 („6 aus 49“ : jeweils 2 = 8 Punkte)

Beim in Deutschland üblichen Lotto „6 aus 49“ werden bei jeder Ziehung (ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) 6 Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 49 gezogen.

- (a) Beschreiben Sie die Situation, dass zu jedem Zeitpunkt $n = 1, 2, 3, \dots$ eine Ziehung stattfindet, durch ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell (d. h. einen geeigneten W.raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), beschreiben Sie das Ereignis „es werden bei der n -ten Ziehung die Zahlen 1,2,3,4,5,6 gezogen“ (im Rahmen Ihres Modells) formal, und bestimmen Sie seine Wahrscheinlichkeit.
- (b) Beschreiben Sie das Ereignis „es werden irgendwann die Zahlen 1,2,3,4,5,6 gezogen“ formal, und bestimmen Sie seine Wahrscheinlichkeit.
- (c) Beschreiben Sie das Ereignis „es werden unendlich oft die Zahlen 1,2,3,4,5,6 gezogen“ formal, und bestimmen Sie seine Wahrscheinlichkeit.
- (d) Sei T der Zeitpunkt, zu dem zum ersten Mal die Zahlen 1,2,3,4,5,6 gezogen werden. Beschreiben Sie T durch eine Zufallsgröße (im Rahmen Ihres Modells), und bestimmen Sie die Verteilung von T (*Hinweis:* Aufgabe 9(b)). Wie lange dauert es im Mittel, bis erstmalig die Zahlen 1,2,3,4,5,6 gezogen werden?

Aufgabe 42 (Zufallsvektoren mit Dichten : 6 + 2 = 8 Punkte)

Es seien $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$, $(\Omega'', \mathcal{A}'', \mu'')$ σ -endliche Maßräume und $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\Omega' \times \Omega'', \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}'')$ eine Zufallsgröße auf einem W.raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, so dass X eine Dichte f_X bzgl. μ' und Y eine Dichte f_Y bzgl. μ'' besitzt.

- (a) Zeigen Sie: X und Y sind genau dann unabhängig, wenn $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ ($x \in \Omega'$, $y \in \Omega''$) eine Dichte von (X, Y) bzgl. des Produktmaßes $\mu' \otimes \mu''$ ist.
- (b) Die Verteilung von (X, Y) sei nun durch die Gleichverteilung auf dem Quadrat $Q := [-1, +1]^2$ gegeben, die die Dichte $f(x, y) := \frac{1}{4} \cdot \mathbf{1}_Q(x, y)$ bezüglich des Maßes $\mathbb{A}^2$ besitzt. Bestimmen Sie die Verteilungen von X und Y , und untersuchen Sie X und Y auf Unabhängigkeit.