

Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 11 (Wiederholung)

Aufgabe 43 (Eigenschaften integrierbarer Zufallsgrößen : 5 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine Zufallsgröße. Zeigen Sie: Aus $X \in L^1(\mathbb{P})$ folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} x \mathbb{P}(|X| \geq x) = 0$.

Hinweis: Analysieren Sie z. B. den Beweis der Markoff-Ungleichung (Lemma 7.7).

Aufgabe 44 (Charakterisierung der Konvergenz fast überall : 5 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, wobei μ ein endliches Maß ist, und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge messbarer reellwertiger Funktionen. Zeigen Sie:

$$f_n \text{ konvergiert } \mu\text{-fast überall gegen } f_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\sup_{m \geq n} |f_m - f_0| \geq \varepsilon) = 0$$

Aufgabe 45 (Momenterzeugende Funktion : jeweils 3 = 9 Punkte)

Ist X eine Zufallsgröße, so dass der Erwartungswert $\mathbb{E}(e^{tX})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ endlich ist, so heißt die Funktion $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto \mathbb{E}(e^{tX})$ *momenterzeugende Funktion* von X . Zeigen Sie:

- (a) φ_X ist stetig.
- (b) φ_X ist differenzierbar mit $\varphi'_X(t) = \mathbb{E}(Xe^{tX})$.
- (c) φ_X ist beliebig oft differenzierbar mit $\varphi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}(X^k e^{tX})$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Insbesondere sind also die Ableitungen an der Stelle $t = 0$ die sog. *Momente* $\mathbb{E}(X^k)$ von X , was die Bezeichnung erklärt.

Aufgabe 46 (Summen unabhängiger Zufallsgrößen : jeweils 3 = 12 Punkte)

Es seien X und Y im Folgenden stets *unabhängige* Zufallsgrößen.

- (a) Die Verteilungen von X und Y mögen Dichten p, q bzgl. der Zählmaße $\mu_{\mathcal{X}}, \mu_{\mathcal{Y}}$ auf den Mengen $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ besitzen, wobei $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ abzählbar. Zeigen Sie, dass $X + Y$ bzgl. des Zählmaßes auf der Menge $\mathcal{Z} := \{x + y : x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\}$ die Dichte

$$(p * q)(z) := \sum_{x \in \mathbb{R}} p(x)q(z - x) \quad (z \in \mathbb{R})$$

besitzt, wobei die Reihe über diejenigen (höchstens abzählbar vielen!) $x \in \mathbb{R}$ zu bilden ist, für die $x \in \mathcal{X}$ und $z - x \in \mathcal{Y}$ gilt.

- (b) Berechnen Sie (als Anwendung) die Verteilung von $X + Y$, wenn X und Y Poisson-verteilt mit den Parametern α bzw. β sind.
- (c) Die Verteilungen von X und Y mögen stückweise stetige Dichten f, g bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ besitzen. Zeigen Sie, dass $X + Y$ bzgl. des Lebesgue-Maßes die Dichte

$$(f * g)(z) := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(z - x) \mathbb{A}(dx) \quad (z \in \mathbb{R})$$

besitzt.

- (d) Berechnen Sie (als Anwendung) die Verteilung von $X + Y$, wenn X und Y jeweils gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind.

Aufgabe 47 (Weierstraß'scher Approximationssatz : jeweils 3 = 9 Punkte)

Es seien $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $p \in [0, 1]$ fest, und $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der zugehörigen Partialsummen, d. h. $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Bestimmen Sie die Verteilung von S_n .

Hinweis: Es geht einfacher ohne Aufgabe 46 (a).

- (b) Zeigen Sie: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(S_n/n)) \rightarrow f(p)$.

Hinweis: Schätzen Sie die Differenz $|\mathbb{E}(f(S_n/n) - f(p))|$ ab, indem Sie die beiden Ereignisse $\{|S_n/n - p| < \delta\}$ und $\{|S_n/n - p| \geq \delta\}$ (für geeignetes $\delta > 0$) getrennt betrachten.

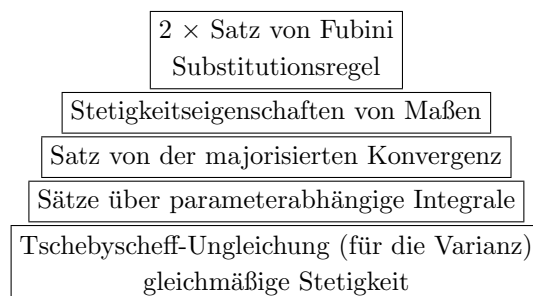
- (c) Zeigen Sie (mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden), dass es eine Folge von Polynomen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie $f_n(p) := \mathbb{E}(f(S_n/n))$, wobei der Parameter p nun variiert.

Sie können sich aus den 5 Aufgaben 4 Aufgaben aussuchen, die Sie abgeben möchten. Wenn Sie Ihre Bearbeitungsquote aufbessern wollen / müssen, können Sie auch alle 5 Aufgaben abgeben.

Abgabe: Mittwoch, 13. Januar 2010, im Fach Ihres Tutors / Ihrer Tutorin

Der Weihnachtsmann hat Ihnen als Weihnachtsgeschenk die Namen wichtiger Sätze mitgebracht, die Sie bei der Lösung der Aufgaben verwenden können (und die Sie sich über die Weihnachtspause in Erinnerung rufen sollten, wenn Sie sie vergessen haben sollten). Aber leider hat er vergessen zu beschriften, welche Sätze für welche Aufgabe nützlich sind:



*Wir wünschen Ihnen ein schönes Weihnachtsfest
sowie einen guten Start ins neue Jahr 2010.*