Universität Bielefeld
Dr. Guido Elsner
Dr. Holger Kösters Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 12 (Gesetze der großen Zahlen / Bedingte Erwartungen)

Aufgabe 48 (Stichprobenmittel und Stichprobenvarianz : 3 + 5 = 8 Punkte)
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}(X_n) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 < \infty$ und dazu

$$\overline{X}_{(n)} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad (n \geq 1) \qquad \text{sowie} \qquad S^2_{(n)} := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\big(X_k - \overline{X}_{(n)}\big)^2 \quad (n \geq 2)\,.$$

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte von $\overline{X}_{(n)}$ und $S^2_{(n)}$.

(b) Untersuchen Sie, ob die Folgen $(\overline{X}_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(S^2_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{P}$-fast sicher konvergieren, und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 49 (Bedingte Erwartungen bei Unabhängigkeit : 6 Punkte)
Es seien X, Y unabhängige reelle Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte messbare Funktion. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(h(X,Y)\,|\,Y = y) = \mathbb{E}(h(X,y))$ für $\mathbb{P}_Y$-fast alle $y \in \mathbb{R}$. (Unabhängige Bedingungen darf man also „einsetzen und vergessen“.)

Bemerkung: Die Aussage bleibt richtig, wenn h eine unbeschränkte messbare Funktion ist, für die $h(X,Y) \in L^1(\mathbb{P})$ gilt.

Aufgabe 50 (Exponentialverteilung : 3 + 5 = 8 Punkte)
Es bezeichne $Exp(\lambda)$ die Exponentialverteilung zum Parameter λ, $\lambda > 0$.

(a) Zeigen Sie: Eine Zufallsgröße X mit Werten in $(0, \infty)$ ist genau dann $Exp(\lambda)$-verteilt, wenn für alle $s, t > 0$ $\mathbb{P}(X > t + s\,|\,X > t) = e^{-\lambda s}$ gilt. Diese Eigenschaft wird auch als *Gedächtnislosigkeit* der Exponentialverteilung bezeichnet.

(b) Es seien X, Y unabhängige Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}_X = Exp(\mu)$ und $\mathbb{P}_Y = Exp(\nu)$, wobei $\mu, \nu > 0$. Bestimmen Sie die bedingten Erwartungen

$$\mathbb{E}(X + Y\,|\,Y)\,, \quad \mathbb{E}(X \cdot Y\,|\,Y)\,, \quad \mathbb{E}(\max\{X,Y\}\,|\,Y)\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 49 nur, wo es sinnvoll erscheint.

Aufgabe 51 (Bedingte Erwartungen bei Invarianz : 2 +2 + 4 = 8 Punkte)
Für festes $d \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{S}_d$ die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, \ldots, d\}$, d. h. die Menge der bijektiven Abbildungen von $\{1, \ldots, d\}$ nach $\{1, \ldots, d\}$. Zu jeder Permutation $\pi \in \mathcal{S}_d$ betrachten wir die entsprechende Permutation der Koordinaten im $\mathbb{R}^d$, $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\pi(x_1, \ldots, x_d) := (x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(d)})$, die wir (wie angegeben) ebenfalls mit π bezeichnen.
Es seien nun $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $\mathbb{P} := \mathbb{Q}^d$ das Produktmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ und $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}^d$ die σ-Algebra der unter der Gruppe der Permutationen invarianten Ereignisse, d. h. $\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{B}^d : \pi(A) = A \text{ für alle } \pi \in S_d\}$, wobei $\pi(A) := \{\pi(x) : x \in A\}$.

(a) Zeigen Sie: Eine Abbildung $f : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist genau dann $\mathcal{C}$-messbar, wenn $f \circ \pi = f$ für alle $\pi \in \mathcal{S}_d$ gilt (d. h. wenn f für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ auf der Menge $\{\pi(x) : \pi \in \mathcal{S}_d\}$ konstant ist).

(b) Zeigen Sie: Es gilt $\mathbb{P}_\pi = \mathbb{P}$ für alle $\pi \in \mathcal{S}_d$, wobei $\mathbb{P}_\pi$ (wie üblich) die induzierte Verteilung bezeichnet.

(c) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung der Abbildung

$$L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \mathbb{P}) \to L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{C}, \mathbb{P}\big|_{\mathcal{C}}) \qquad X \mapsto \mathbb{E}(X\,|\,\mathcal{C})\,,$$

d. h. geben Sie für jedes $X \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \mathbb{P})$ explizit eine Festlegung von $\mathbb{E}(X\,|\,\mathcal{C})$ an.

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{1}{d!}\sum_{\pi\in\mathcal{S}_d} X \circ \pi$.

Abgabe: Mittwoch, 20. Januar 2010, im Fach Ihres Tutors / Ihrer Tutorin