Universität Bielefeld
Dr. Guido Elsner
Dr. Holger Kösters

Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 13 (Bedingte Erwartungen / Martingale)

Aufgabe 52 (Martingale : 3 + 3 = 6 Punkte)
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}(X_n) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 < \infty$, $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}_0$, und $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie, dass $(S_n - n\mu)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass im Fall $\mu = 0$ $(S_n^2 - n\sigma^2)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

Aufgabe 53 (Bedingte Jensen-Ungleichung und Submartingale : 3 + 3 = 6 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Beweisen Sie die bedingte Jensen-Ungleichung:

Ist $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ eine Unter-σ-algebra, ist X eine integrierbare Zufallsgröße mit Werten in einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, so dass $\varphi \circ X$ ebenfalls integrierbar ist, so gilt $\mathbb{E}(\varphi \circ X|\mathcal{A}_0) \geq \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{A}_0))$ $\mathbb{P}$-f.s.

(b) Es seien $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, so dass $\varphi \circ X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ integrierbar ist.

Zeigen Sie, dass $(\varphi \circ X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal bzgl. $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Hinweis zu (a): Es darf verwendet werden, dass φ (als konvexe Funktion auf einem offenen Intervall) stetig und damit messbar ist. Zeigen Sie zuerst, dass $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}_0)$ $\mathbb{P}$-fast sicher Werte in I annimmt. Benutzen Sie dann, dass für alle $x, y \in I$ die Ungleichung $\varphi(y) \geq \varphi(x) + \varphi'_+(x)(y - x)$ gilt, wobei $\varphi'_+(x)$ die (wegen der Konvexität existierende) rechtsseitige Ableitung von φ an der Stelle x ist.

Aufgabe 54 (Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$: jeweils 3 = 18 Punkte)
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}(X_i = +1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$, $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}_0$, und $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt auch *symmetrische Irrfahrt* auf $\mathbb{Z}$.

Für $A, B \in \mathbb{N}$ sei $T_{A,B} := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = +A \text{ oder } S_n = -B\}$ (wobei $\inf \emptyset := \infty$).

(a) Begründen Sie, dass $T_{A,B}$ eine $\mathbb{P}$-fast sicher endliche Stoppzeit ist.

(b) Zeigen Sie mittels Martingaltheorie, dass $\mathbb{E}S_{T_{A,B}} = 0$. Benutzen Sie dieses Ergebnis, um die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(S_{T_{A,B}} = +A)$ und $\mathbb{P}(S_{T_{A,B}} = -B)$ zu berechnen.

(c) Zeigen Sie mittels Martingaltheorie, dass $\mathbb{E}S_{T_{A,B}}^2 = \mathbb{E}T_{A,B}$. Benutzen Sie dieses Ergebnis, um den Erwartungswert $\mathbb{E}T_{A,B}$ zu berechnen.

Für $A \in \mathbb{N}$ sei $T_A := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = +A\}$ (wobei $\inf \emptyset := \infty$).

(d) Begründen Sie, dass T_A eine $\mathbb{P}$-fast sicher endliche Stoppzeit ist.

(e) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}S_{T_A} = A > 0 = \mathbb{E}S_0$, und begründen Sie, warum dies nicht im Widerspruch zum Optional-Sampling-Theorem steht.

(f) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}T_A = \infty$.

Hinweise:
– Überlegen Sie sich für Teil (a), dass $\mathbb{P}(T_{A,B} > k(A + B)) \leq \left(1 - (\frac{1}{2})^{A+B}\right)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
– Überlegen Sie sich für Teil (d), dass $\mathbb{P}(T_A = \infty) \leq \mathbb{P}(S_{T_{A,B}} = -B)$ für alle $B \in \mathbb{N}$.

Abgabe: Mittwoch, 27. Januar 2010, im Fach Ihres Tutors / Ihrer Tutorin