

## Übungen zur Vorlesung Methoden der angewandten Mathematik

### Blatt 2

#### Aufgabe 1

Sei  $X$  die jährliche Milchleistung von Kühen (in Vielfachen von 100 Litern). Betrachten Sie die Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  von  $X$  aus der Vorlesung (vgl. Folienmaterial zu Histogramm und Stamm-Blatt-Diagramm auf der Homepage der Veranstaltung). Bestimmen Sie arithmetisches Mittel, Median und Modalwert der Stichprobe.

#### Aufgabe 2

Gegeben seien die Datenreihen

2, 7, 1, 9, 2, 4, 4, 5, 2.

und

4, 6, 6, 3, 2, 14, 1, 1

- a) Bestimmen Sie für jede Datenreihe jeweils einen Modalwert und einen Median sowie das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel der Datenreihe.
- b) Wie muss sich der letzte Wert der ersten Datenreihe ändern, wenn der erste Wert von 2 auf 3 erhöht wird und gleichzeitig
  - (i) der in a) bestimmte Modalwert,
  - (ii) der in a) bestimmte Median,
  - (iii) das arithmetische Mittel,
  - (iv) das geometrische Mittel,
  - (v) das harmonische Mittel

der Datenreihe seinen Wert nicht verändern soll?

#### Aufgabe 3 (Geometrisches und harmonisches Mittel)

- a) Zeigen Sie mithilfe eines einfachen Beispiels, dass geometrisches und harmonisches Mittel keine Lagemaße im Sinne der Bedingung  $(\star)$  aus der Vorlesung sind: Verschiebt man alle Stichprobenwerte um einen festen Wert  $a > 0$  nach rechts, so erhält man als geometrisches (bzw. harmonisches) Mittel im Allgemeinen *nicht* das um  $a$  nach rechts verschobene geometrische (bzw. harmonische) Mittel der ursprünglichen Werte.
- b) Zeigen Sie: Der Durchschnittszinssatz für ein Kapital  $K$ , das für  $n$  Jahre angelegt wird und im  $j$ -ten Jahr ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) mit dem Zinssatz  $p_j$  % verzinst wird, ist gleich  $(\bar{x}_g - 1) \cdot 100\%$ , wobei  $\bar{x}_g$  das geometrische Mittel der Werte  $x_j := 1 + \frac{p_j}{100}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , ist.  
(Hinweis: Bevor Sie diesen und den Aufgabenteil c) gar nicht bearbeiten, denken Sie sich für die vorkommenden Variablen konkrete Werte aus, mit denen Sie dann rechnen!)
- c) Ein Rohr bestehe aus  $n$  gleich langen Teilrohren. Eine Flüssigkeit fließt durch das  $j$ -te Teilrohr mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_j$  m/s ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Zeigen Sie, dass die durchschnittliche Fließgeschwindigkeit der Flüssigkeit auf der gesamten Strecke gerade das harmonische Mittel  $\bar{v}_h$  der Werte  $v_1, \dots, v_n$  ist.  
(Hinweis: Wenn die Gesamtstrecke die Länge  $s$  hat, wie lang sind dann die Teilstrecken und wieviel Zeit benötigt die Flüssigkeit auf den Teilstrecken?)

- d) *Vergleich von arithmetischem, geometrischem und harmonischem Mittel:*  
Für reelle Zahlen  $x_1, x_2 > 0$  gelten die Ungleichungen:

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \quad \text{und} \quad \sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2)$$

Beweisen Sie die beiden Ungleichungen!

(Hinweis: Verwenden Sie die offensichtliche Ungleichung  $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ .)

#### Aufgabe 4

- a) Gegeben seien zwei Stichproben  $x'_1, \dots, x'_m$  und  $x''_1, \dots, x''_n$  eines quantitativen Merkmals  $X$ . Die arithmetischen Mittel der Stichproben seien  $\bar{x}'$  bzw.  $\bar{x}''$ . Beweisen Sie die folgende Aussage: Fasst man diese beiden Stichproben zu einer Stichprobe zusammen, so gilt für das arithmetische Mittel  $\bar{x}$  der zusammengefassten Stichprobe:

$$\bar{x} = \frac{m}{m+n} \cdot \bar{x}' + \frac{n}{m+n} \cdot \bar{x}''$$

- b) Wie lautet eine entsprechende Formel für das arithmetische Mittel  $\bar{x}$  der Stichprobe, die entsteht, wenn man  $k$  Stichproben der Umfänge  $n_1, n_2, \dots, n_k$  mit den arithmetischen Mitteln  $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$  zu einer Stichprobe zusammenfasst? ( $k \in \mathbb{N}$ )
- c) Zur Erhebung der Milchleistung (in 100 l) wird zu den Daten aus Aufgabe 1 eine weitere Stichprobe gezogen:

32,5	38,0	33,4	36,1	39,8	35,2	34,4	37,3	40,6	36,7	33,3	33,3
37,7	34,2	34,9	34,3	38,5	37,1	36,0	42,8	33,7	35,5	38,6	35,5
33,9	34,8	36,9	36,1	35,6	32,6	35,3	35,9	36,9	32,7	34,1	36,6

Bestimmen Sie das arithmetische Mittel dieser zweiten Stichprobe und dann das arithmetische Mittel aller Daten, d.h. das arithmetische Mittel der aus dieser und der Stichprobe aus Aufgabe 1 zusammengeführten Stichprobe.

**Abgabe: Mittwoch, 28.10.09, 12.00 Uhr, Postfächer der Tutoren im Kopierraum V3-128**

**Vergessen Sie nicht, diejenigen Aufgaben anzugeben, die Sie bereit sind vorzurechnen!**