Universität Bielefeld **Wintersemester 2009/10**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 5

Aufgabe 1
Gegeben seien die Ereignisse A, B und C. Geben Sie eine formale Beschreibung der nachfolgend in Worten beschriebenen Ereignisse:

a) Nur C tritt ein.
b) A oder B treten nicht ein, aber C tritt ein.
c) Höchstens eines der drei Ereignisse tritt ein.
d) Genau eines der Ereignisse tritt nicht ein.

Aufgabe 2
Gegeben seien die Ereignisse A, B und C. Zeigen Sie die folgenden Gleichheiten mithilfe einer vollständigen Fallunterscheidung.

a) $\big(A \cap B^c\big) \cup B = A \cup B$.
b) $\big(A \cup B\big)^c = A^c \cap B^c$
c) $A \cap (B \cup C) = \big(A \cap B\big) \cup \big(A \cap C\big)$

Aufgabe 3
Gegeben sei die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Betrachten Sie die folgenden Teilmengen:

$$A := \{1, 2, 3\}; \qquad B := \{2, 4\}.$$

Bestimmen Sie die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω, die die beiden Teilmengen A und B enthält.

Aufgabe 4

a) Sei $\mathcal{A}_i, i \in I$ eine Familie von σ-Algebren. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ wieder eine σ-Algebra ist. Bildet man für eine Menge $\mathcal{E}$ von Teilmengen einer Menge Ω den Durchschnitt über alle σ-Algebren, die $\mathcal{E}$ enthalten ,so erhält man die kleinste σ-Algebra über Ω, die alle Mengen aus $\mathcal{E}$ enthält. Diese σ-Algebra wird mit $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ bezeichnet.

b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{E}$ bestehe aus allen halboffenen Intervallen $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Die σ-Algebra $\mathcal{B} := \mathcal{A}(\mathcal{E})$ heißt *Borel*-σ-Algebra über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass alle einpunktigen Mengen $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, in der σ-Algebra $\mathcal{B}$ enthalten sind.
(Hinweis: Schreiben Sie die einpunktige Menge $\{x\}$ als abzählbaren Durchschnitt von halboffenen Intervallen.)

c) Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ heißt *co-abzählbar*, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus A$ abzählbar (d.h. endlich oder abzählbar unendlich) ist.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ist abzählbar oder } A \text{ ist co-abzählbar}\}$ eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$ ist und dass $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra ist, die alle einpunktigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthält. Stimmt $\mathcal{A}$ mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ überein?

Wenn Sie diese Aufgabe nicht vollständig lösen können, sollten Sie versuchen, zumindest Beweisideen zu entwickeln, d.h. notieren Sie das, was man zeigen müsste.

Abgabe: Mittwoch, 18.11.09, 12.00 Uhr, Postfächer der Tutoren in V3-128

Vergessen Sie nicht, diejenigen Aufgaben anzugeben, die Sie bereit sind vorzurechnen!