Universität Bielefeld **Wintersemester 2009/10**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 8

Aufgabe 1
Auf $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sei $p : \Omega \to [0, 1]$ gegeben durch $p(1) = p(2) = p(3) = 0,2, p(4) = 0,3$ und $p(5) = 0,1$. Sind die Ereignisse $A := \{3, 2\}$ und $B := \{1, 4\}$ bzw. die Ereignisse $C := \{1, 2, 5\}$ und $D := \{1, 3\}$ unabhängig?

Aufgabe 2
Gegeben sei die diskrete Zufallsvariable X mit ihrer Verteilung $x \mapsto P(X = x)$ und ihrer Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F_X(x) := P(X \leq x)$. Zeichnen Sie die Verteilung und die Verteilungsfunktion jeweils in ein geeignetes Koordinatensystem für den Fall, dass

a) die Verteilung von X durch

$$P(X = -2) = \frac{1}{4}, \quad P(X = -0,5) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 0) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 5) = \frac{1}{8}$$

gegeben ist;

b) X binomialverteilt zu den Parametern $n = 4$ und $p = 0,25$ ist;

c) X Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda = 1$ ist;

d) X geometrisch verteilt zum Parameter $p = 0,5$ ist.

Aufgabe 3

a) Durch

x	-2	-0,5	0	1	2,5
$P(X = x)$	0,1	0,25	0,2	0,15	0,3

sei die Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen X gegeben. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X und zeichnen Sie die Graphen von der Verteilung $x \mapsto P(X = x)$ und von F_X.

b) Durch

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad y < -1 \\ 0,2, & \text{falls} \quad -1 \leq y < 0 \\ 0,6, & \text{falls} \quad 0 \leq y < 1,5 \\ 0,75, & \text{falls} \quad 1,5 \leq y < 3 \\ 1, & \text{falls} \quad y \geq 3 \end{cases}$$

ist die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen Y gegeben. Bestimmen Sie die Verteilung von Y und zeichnen Sie die Graphen der Verteilung $x \mapsto P(Y = x)$ und von F_Y.

c) Kann durch die folgenden Funktionen p, q bzw. r die Verteilung einer Zufallsvariablen gegeben sein, d.h. gibt es eine Zufallsvariable X mit $P(X = x) = p(x)$ (bzw. $= r(x)$, $= q(x)$)? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

x	-6	1	3	14	22
$p(x)$	0,1	0,05	0,35	0,15	0,4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$q(x)$	0,1	0,2	0,15	-0,1	0,3	0,15	0,2

x	-4	-0,1	0	0,1	6
$r(x)$	0,1	0,6	0	0,15	0,15

d) Kann durch die folgenden Funktionen F bzw. G die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen gegeben sein? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < -1 \\ 0,2, & \text{falls} \quad -1 \leq x < -0,5 \\ 0,6, & \text{falls} \quad -0,5 \leq x < 1 \\ 0,5, & \text{falls} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{falls} \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < -10 \\ 0,8, & \text{falls} \quad -10 \leq x < -2 \\ 0,9, & \text{falls} \quad -2 \leq x < 0 \\ 1, & \text{falls} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4

Begründen Sie, welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Wahrscheinlichkeitsdichten sind. Bestimmen Sie ggf. die zugehörige Verteilungsfunktion und skizzieren Sie ihren Graphen.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x^4, & \text{falls} -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{15}x^3, & \text{falls} -1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{falls} -0,25 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x \leq 0,5, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & \text{falls } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$

Abgabe: Mittwoch, 09.12.09, 12.00 Uhr, Postfächer der Tutoren in V3-128

Vergessen Sie nicht, diejenigen Aufgaben anzugeben, die Sie bereit sind vorzurechnen!