Universität Bielefeld **Wintersemester 2009/10**
G. Elsner

Übungen zur Vorlesung

Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 10

Aufgabe 1
Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	-10	-0,75	0	1	2,5	3	π	10
$P(X = x)$	0,19	0,02	0,03	0,16	0,25	0,001	0,25	0,099

Berechnen Sie den Erwartungswert von X, von $Y := 2X - 2$ und von $Z := X^2$.

Aufgabe 2
Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = 0$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass dann $P(X \leq 0) = P(X \geq 0)$ gelten muss.

Aufgabe 3
Eine Firma stellt Glühbirnen her. Es ist bekannt, dass das Unternehmen ca. 4 % Ausschuss produziert, d.h., ca. 4 % der produzierten Glühbirnen sind defekt. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle zieht die Firma eine Stichprobe, indem sie an fünf aufeinander folgenden Tagen (zu einem zufälligen Zeitpunkt) jeweils eine Glühbirne der Produktion entnimmt. Sei X die zufällige Anzahl der defekten Glühbirnen in der gezogenen Stichprobe. Die Art und Weise, wie die Stichprobe entnommen wird, rechtfertigt die Annahme, dass X binomialverteilt ist. Berechnen

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
   - sich keine defekte Glühbirne in der Stichprobe befindet;
   - sich mindestens zwei defekte Glühbirnen in der Stichprobe befinden.

b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl $\mathbb{E}(X)$ defekter Glühbirnen in der Stichprobe.

Aufgabe 4
a) Die Zufallsvariable Y besitzt die Verteilung

$$P(Y = k) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2}, & \text{für } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad (\star)$$

Zeigen Sie, dass durch $(\star)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert ist und dass $\mathbb{E}(Y)$ nicht existiert, d.h. dass die Summe $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} k \cdot P(Y = k)$ nicht wohldefiniert ist.

b) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ konvergiert und der Wert der Reihe sei mit $c \in \mathbb{R}_{>0}$ bezeichnet. Somit ist durch

$$P(Z = k) = \begin{cases} \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{k^3}, & \text{für } k = 1, 2, 3, ... \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

offensichtlich die Verteilung einer Zufallsvariablen Z gegeben. Zeigen Sie, dass $\mu := \mathbb{E}(Z)$ endlich ist und dass $\mathbb{E}\big((Z-\mu)^2\big) = +\infty$ gilt.

Hinweis: Sie sollten (ohne Beweis) die Formel von Euler

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

und die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ *benutzen!*

Abgabe: Mittwoch, 23.12.09, 12.00 Uhr, Postfächer der Tutoren in V3-128

Vergessen Sie nicht, diejenigen Aufgaben anzugeben, die Sie bereit sind vorzurechnen!