

Übungen zur Vorlesung Methoden der angewandten Mathematik

Blatt 11

Aufgabe 1

Eine Firma stellt Prozessoren für Computer her. Es ist bekannt, dass das Unternehmen ca. 4 % Ausschuss produziert, d.h., ca. 4 % der produzierten Prozessoren sind defekt. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle entnimmt die Firma der Produktion jeden Werktag (zu einem zufälligen Zeitpunkt) jeweils einen Prozessor.

- a) Sei X die zufällige Anzahl defekter Prozessoren in einer Stichprobe, die in einer Woche (= 5 Werktagen) gezogen wird. Die Art und Weise, wie die Stichprobe entnommen wird, rechtfertigt die Annahme, dass X binomialverteilt ist.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
 - (i) sich kein defekter Prozessor in der Stichprobe befindet;
 - (ii) sich mindestens zwei defekte Prozessoren in der Stichprobe befinden.
 - Berechnen Sie die erwartete Anzahl defekter Prozessoren in der Stichprobe. Wie groß ist die Varianz?
- b) Sei T die Anzahl der Tage, die vergehen, bis das erste Mal ein defekter Prozessor gezogen wird. Wie ist die Zufallsvariable T verteilt? Wie groß ist die zu erwartende Anzahl der Tage, die vergehen, bis der erste defekte Prozessor entnommen wird?
Wie groß ist die Varianz von T ?

Aufgabe 2

Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f . Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und die Varianz $\mathbb{V}(X)$.

- a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Hinweis zu b): Verwenden Sie das Verfahren der partiellen Integration, das Sie notfalls in jedem Buch über Integrationsrechnung finden werden!

Aufgabe 3

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = 3$ und Varianz $\mathbb{V}(X) = 0$. Wie sieht die Verteilung von X aus? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

- a) Die Kovarianz ist symmetrisch und linear in jeder Komponente, d.h. für Zufallsvariablen X, Y und Z gilt: $\text{Kov}(X, Y) = \text{Kov}(Y, X)$ und $\text{Kov}(X + Y, Z) = \text{Kov}(X, Z) + \text{Kov}(Y, Z)$
- b) Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y mit $\mathbb{V}(X) \leq \mathbb{V}(Y) < +\infty$. Dann gilt: Die Kovarianz von X und Y ist immer kleiner gleich $\mathbb{V}(Y)$.
(Hinweis: Betrachten Sie die Differenz $X - Y$ und verwenden Sie a)!

Abgabe: Mittwoch, 13.01.2010, 12.00 Uhr, Postfächer der Tutoren in V3-128
Vergessen Sie nicht, diejenigen Aufgaben anzugeben, die Sie bereit sind vorzurechnen!

Ich wünsche Ihnen ein schönes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neues Jahr!