Universität Bielefeld **Wintersemester 2009/10**
G. Elsner

Übungsklausur zur Vorlesung

Methoden der angewandten Mathematik

zugleich Blatt 13

Hinweise: Auf diesem Blatt sind mögliche Klausuraufgaben zusammengestellt, um Ihnen einen Eindruck möglicher Aufgabentypen zu vermitteln sowie weiteres Übungsmaterial zur Verfügung zu stellen. Dabei sollten Sie beachten, dass der Umfang der Klausur später der Klausurdauer von 90 Minuten angepasst sein wird und dass diese Übungsklausur nicht alle klausurrelevanten Inhalte umfasst.

Aufgabe 1
In einer Messreihe werden die folgenden 18 Daten erhoben:

$$16, 34, 34, 34, 36, 37, 38, 40, 41, 41, 42, 43, 47, 48, 55, 56, 60, 61$$

a) Bestimmen Sie Modalwert, Median, oberes und unteres Quartil sowie das arithmetische Mittel der Stichprobe.

b) Bestimmen Sie Spannweite, Quartilsabstand und Standardabweichung der Stichprobe.

c) Stellen Sie die Stichprobe in einem Stengel-Blatt-Diagramm und in einem Box-Plot dar.

Aufgabe 2
Ein vierseitiger Spielwürfel (Tetraeder) und ein gewöhnlicher fairer Würfel werden nacheinander geworfen.
Geben Sie eine geeignete formale Beschreibung des Zufallsexperimentes (Ω, p) an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Die Würfel zeigen bei beiden Würfen dieselbe Augenzahl.

B: Die Würfel zeigen bei beiden Würfen verschiedene Augenzahlen und ihre Summe ist 8.

C: Die Augensumme ist 5.

Aufgabe 3

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 12 Leichtathleten ein Team für eine 4×100 m - Staffel zusammenzustellen?

b) Wie viele Worte der Länge 5 (zur Erklärung: Ein *Wort der Länge 5* ist eine Anordnung von fünf Buchstaben unabhängig davon, ob diese Anordnung eine sprachliche Bedeutung hat) kann man aus den Buchstaben des Wortes `E R F O L G` bilden, wenn

   (a) jeder Buchstabe höchstens einmal auftreten darf,
   (b) Buchstaben wiederholt werden dürfen,
   (c) Vokale nicht direkt nebeneinander stehen dürfen?

c) Ein Möbelhaus bietet als Sonderangebot ein 10er Paket Kerzen an, das man sich selbst aus verschiedenfarbigen Kerzen beliebig zusammenstellen kann. Man kann zwischen 4 Farben wählen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?

Aufgabe 4
Ein Elektrogerätehersteller bezieht für seine Produktion Kabel von drei verschiedenen Zuliefererfirmen A, B und C. Firma A liefert 20 % , Firma B 35 % und Firma C 45 % der für die Produktion notwendigen Kabel. Alle Kabel werden im Lager zunächst zwischengelagert. Ferner ist bekannt, dass die von Firma A gelieferten Kabel zu 4 % einen Kabelbruch aufweisen, die von Firma B zu 3 % und die von Firma C zu 2 %.

a) Ein Kabel im Lager wird zufällig herausgegriffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weist es einen Kabelbruch auf?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein solches Kabel mit Kabelbruch von Firma C?

Aufgabe 5
Die Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig. Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind gegeben durch

x	-1	0	3
$P(X=x)$	0,4	0,35	0,25

bzw.

y	-1	2
$P(Y=y)$	0,45	0,55

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X und von Y

b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y. Wie groß ist die Kovarianz von X und Y?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von $X \cdot Y$ und die Varianz von $X + Y$.

Aufgabe 6
Von einem Fahrstuhl ist bekannt, dass er pro Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0,3 % ausfällt (Mehrfache Ausfälle pro Tag werden als zu unwahrscheinlich vernachlässigt!).

a) Sei X die zufällige Anzahl der Ausfälle des Fahrstuhls in einer Woche (= 7 Tage). Die Art und Weise, wie Ausfälle auftreten, rechtfertigt die Annahme, dass X binomialverteilt ist.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

  (i) der Fahrstuhl in einer Woche gar nicht ausfällt;
  (ii) der Fahrstuhl in einer Woche mehr als ein Mal ausfällt.

- Berechnen Sie die erwartete Anzahl Ausfälle pro Woche. Wie groß ist die Varianz?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in 10000 Tagen der Fahrstuhl zwischen 28 und 33 Mal ausfällt.

c) Sei Y die zufällige Anzahl der Fahrstuhlausfälle, die in fünf Jahren (1 Jahr = 365 Tage) zu verzeichnen sind. Auch hier darf angenommen werden, dass Y binomialverteilt ist. Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fahrstuhl in fünf Jahren zwischen sechs und neun Mal ausfällt.

Aufgabe 7

a) Begründen Sie, welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Wahrscheinlichkeitsdichten sind. Bestimmen Sie für die Funktionen, die Wahrscheinlichkeitsdichten sind, die zugehörige Verteilungsfunktion.

(i) $f(x) = \begin{cases} 48x^2 - 48x + 9, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } -2 \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{falls} -0,5 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x \leq 0,5, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{falls } 1 \leq x \leq e, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

b) Betrachten Sie zu den Funktionen f aus a), die Wahrscheinlichkeitsdichten sind, jeweils eine Zufallsvariable X, die diese Funktion als Dichte besitzt, und berechnen Sie ihren Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$.

Aufgabe 8
,,Wahr” oder ,,falsch”? Bitte kreuzen Sie bei den nachfolgenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen wahr oder falsch sind.

		wahr	**falsch**
(1)	Sind zwei Ereignisse A und B disjunkt, so sind sie auch unabhängig.	○	○
(2)	Das arithmetische Mittel einer Stichprobe geraden Umfangs kann nicht kleiner als das untere Quartil der Stichprobe sein.	○	○
(3)	Gilt für ein Ereignis A, dass $\mathrm{P}(A) = 0$, so gilt für alle Ereignisse B, dass A und B unabhängig sind.	○	○
(4)	Für unabhängige Ereignisse A und B gilt: $\mathrm{P}(A\|B) = \mathrm{P}(B\|A)$	○	○
(5)	Nimmt eine Zufallsvariable X nur positive Werte an, so gilt $\mathbb{E}(X) \geq 0$	○	○
(6)	Der Median einer Stichprobe minimiert die mittlere absolute Abweichung	○	○

Aufgabe 9
Sei X eine Zufallsvariable, die die Werte 1, 2, 3, 4, ... annehmen kann. Beweisen Sie:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X \geq n)$$

(Hinweis: Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeit P(X $\geq$ n) für n = 1,2,3,... als Summe von Wahrscheinlichkeiten der Form P(X = k) so in die erste, zweite, dritte,... Zeile eines ,,Dreieckschemas", dass gleiche Summanden untereinander stehen.)

Abgabe: Mittwoch, 27.01.2010, 12.00 Uhr, Postfächer der Tutoren in V3-128

Vergessen Sie nicht, diejenigen Aufgaben anzugeben, die Sie bereit sind vorzurechnen!