<u>Satz</u> (Rechnen mit Erwartungswerten)

Es seien X und Y diskrete ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$ existieren (bzw. beide $= +\infty$ oder beide $= -\infty$ sind!), $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion, so dass $\mathbb{E}(g(X))$ existiert. Dann gilt:

(1) $$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{\substack{x \\ (\text{Werte von } X)}} g(x) \cdot P(X=x)$$

(2) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathbb{E}(aX+b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b$

(der Erwartungswert ist linear)

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

<u>Beweis</u>: (1) $$\sum_x g(x) \cdot P(X=x) \underset{\text{Umsortieren!}}{=} \sum_y \sum_{\substack{x \text{ mit} \\ g(x)=y}} \overbrace{g(x)}^{=y} \cdot P(X=x)$$

$$= \sum_y y \cdot \Big(\sum_{\substack{x \text{ mit} \\ g(x)=y}} P(X=x) \Big) = \sum_y y \cdot P(g(X)=y)$$

$$= \mathbb{E}(g(X))$$

(2) Mit $g(x) = ax+b$ folgt aus (1):

$$\mathbb{E}(aX+b) = \sum_x (ax+b) \cdot P(X=x) = a \cdot \underbrace{\sum_x x \cdot P(X=x)}_{= \mathbb{E}(X)} + b \cdot \underbrace{\sum_x P(X=x)}_{=1}$$

$$= a \cdot \mathbb{E}(X) + b$$

Mit dem Satz über die totale W.keit folgt:

$$\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \sum_x x \cdot \underbrace{\Big(\sum_y P(X=x, Y=y)\Big)}_{= P(X=x)} + \sum_y y \Big(\sum_x P(\ldots)\Big)$$

$$= \sum_x \sum_y (x+y) \cdot P(X=x, Y=y)$$

und

$$\mathbb{E}(X+Y) = \sum_z z \cdot P(X+Y=z)$$

$$= \sum_z z \cdot \Big(\sum_y \underbrace{P(X+Y=z, Y=y)}_{= P(X=z-y,\, Y=y)} \Big)$$

$$\overset{*}{=} \sum_x \sum_y (x+y)\, P(X=x, Y=y)$$

$$= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

* Setze $x := z-y$ und beachte, dass eine Summation über z einer Summation über x entspricht.

$\boxed{?}$