

# Diskrete Methoden in der Darstellungstheorie

Claus Michael Ringel

In der Mathematik hat man es vielfach mit hochkomplexen Problemen zu tun, die sich Lösungsversuchen gegenüber sehr sperrig zeigen. Analysiert man derartige Problemstellungen genauer, so kann man ihnen manchmal viel einfachere Strukturen zuordnen, die wie Planungsskizzen eines wenig zugänglichen Gebäudes Aufschluß über das interne Gefüge liefern. Sehr oft führt eine derartige Betrachtungsweise auf *diskrete* Strukturen, also auf mathematische Modelle, die aus einzelnen ("diskreten") Einheiten bestehen und nicht mit den bekannten Verfahren der Infinitesimalrechnung, sondern mit kombinatorischen und graphentheoretischen Methoden zu untersuchen sind. Am Beispiel der Darstellungstheorie von Algebren, einem speziellen Gebiet der Reinen Mathematik, soll die Wirksamkeit diskreter Methoden beleuchtet werden. Die Verwendung diskreter Methoden in den letzten 20 Jahren hat hier einen entscheidenden Durchbruch bei grundsätzlichen Fragestellungen gebracht.

## Was heißt diskret?

Der Gegensatz zwischen *diskret* und *stetig* ist ganz fundamental in der Mathematik. Er spiegelt wider denjenigen zwischen Abzählen und Abmessen, zwischen Größen, die einen eindeutig bestimmten Wert besitzen, und solchen, die zwar vielleicht beliebig genau gemessen werden können, wo es aber Sinn macht, kleine Abweichungen zu erlauben. Diskretisieren bedeutet gerade, statt den stetigen Verlauf zu betrachten, auf endlich viele Einzelwerte zurückzugreifen. Häufig spricht man dabei vom Digitalisieren wie etwa bei digitalen Tonaufnahmen: Tonhöhen, die ja ein stetiges Spektrum durchlaufen, werden durch bestimmte feste Werte approximiert.

In der Mathematik hat im Laufe ihrer Geschichte die Betonung diskreter und stetiger Phänomene abgewechselt. Während sich die Messungen und Konstruktionen der Geometrie zuallererst auf stetige Phänomene bezogen haben, wurde im Gefolge der Grundlagenkrise der Geometrie um die Jahrhundertwende die endliche Geometrie entwickelt, die neue, auch endliche Modelle für geometrische Axiomensysteme sucht, und die damit ganz wesentlich zur Entwicklung der modernen diskreten Mathematik beigetragen hat. Das gegenwärtige Interesse an diskreten Strukturen beruht natürlich nicht zuletzt darauf, daß derartige Problemstellungen sehr leicht mit Computer-Hilfe angegangen werden können.

Algebra, das Rechnen mit Variablen, mit Buchstaben, ist immer zuerst diskret, denn es steht ja das formale Rechnen im Vordergrund, man denke an Formeln wie

$$(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2.$$

Allerdings werden üblicherweise  $X, Y$  als (unbestimmte, also noch nicht bestimmte) reelle Zahlen interpretiert, und die Menge der reellen Zahlen ist etwas Nicht-Diskretes. Solange man nur mit den Buchstaben operiert, treibt man diskrete Mathematik; sobald aber reelle Zahlen eingesetzt werden, verläßt man den Bereich des Diskreten.

Die moderne Algebra als Theorie der algebraischen Strukturen (von Gruppen, Ringen, Körpern, Vektorräumen, allgemeiner gesagt, von Mengen, auf denen Operationen definiert sind) ist eine Theorie diskreter Strukturen. Überall jedoch, wo mit einem speziellen Grundkörper wie dem der reellen Zahlen gearbeitet werden muß, tauchen typische nicht-diskrete Phänomene auf, die einen algebraisch-geometrische Zugang erwarten lassen. Manchmal aber zeigt sich, daß auch hier diskrete Strukturen auftreten, und daß die Untersuchung dieser Strukturen zur Problemklärung entschieden beitragen kann.

### Diskrete Methoden in der Algebra

Schon im 19. Jahrhundert sind derartige Untersuchungen angestellt worden. Man hat zum Beispiel Kurven vierter Ordnung in der Ebene betrachtet. In einem Koordinatensystem sind dies die Punkte  $(x, y)$ , die eine Gleichung wie zum Beispiel

$$x^4 + y^4 + x^2y^2 = 1$$

erfüllen (die Summe der Exponenten der einzelnen Summanden soll höchstens 4 sein). Jede Gerade schneidet eine derartige Kurve in höchstens vier Punkten, sie kann sie aber auch in genau zwei Punkten berühren, dann nennt man eine derartige Gerade eine Doppeltangente. Man kann nun zeigen, daß es bei den meisten Kurven vierter Ordnung genau 28 Doppeltangenten gibt (Abbildung 1).

Ein typisches mathematisches Problem beim Studium von Kurven besteht darin, "Normalformen" zu finden: man versucht, ein geeignetes Koordinatensystem zu finden, um eine möglichst einfache algebraische Beschreibung zur Verfügung zu haben. Dieses Normalformenproblem ist (wegen der auftretenden reellen oder komplexen Koeffizienten) ein typisches nicht-diskretes Problem. Es wurde für Kurven vierter Ordnung im letzten Jahrhundert dadurch gelöst, daß man nicht die Kurve selbst, sondern die Konfiguration der zugehörigen 28 Doppeltangenten untersuchte. So führte die Zuordnung einer diskreten Struktur (bestehend aus nur 28 Elementen) zur Lösung eines relativ schwierigen nicht-diskreten Problems.

Derartige Geradenkonfigurationen spielen auch sonst eine große Rolle: so gibt es auf den meisten kubischen Flächen genau 27 Geraden (kubische Flächen sind Flächen im Raum, die durch eine Gleichung dritten Grades beschrieben werden). Jede dieser Geraden hat mit jeder von zehn anderen solchen Geraden jeweils einen Punkt gemeinsam. Ein Modell einer derartigen Fläche wurde als deutscher Beitrag bei der Weltausstellung 1894 in Chicago vorgeführt (Abbildung 2). Auch hier zeigt sich, daß die diskrete Konfiguration der 27 Geraden mit ihrem Schnittverhalten einen Zugang zum Normalformenproblem liefert.

Ein ähnlicher Ansatz wird im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 343 "Diskrete Strukturen in der Mathematik" der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Teilprojekt "Darstellungstheorie von Algebren" verwandt. Untersucht werden hier sogenannte "Längenkatoren", wie sie in vielen mathematischen Teilgebieten, vor allem in der Algebra, aber auch in Geometrie und Analysis, auftreten. Es hat sich auch hier herausgestellt, daß sich bestimmten hochgradig komplexen nicht-diskreten Strukturen sehr schön diskrete Modelle zuordnen lassen, die Einsicht in klassische Problemstellungen liefern.

## Darstellungen von Algebren

Was sind Algebren? Was ist *eine* Algebra? Algebra ist, das wurde oben notiert, das formale Rechnen mit Variablen. Nun muß der Mathematiker mit verschiedenen Rechenregeln, mit verschiedenen Rechensystemen arbeiten. Fixieren wir ein solches System, untersuchen wir zum Beispiel, was es bedeutet, wenn zwei Variable  $X, Y$  gegeben sind, die nicht kommutieren –  $XY$  also von  $YX$  verschieden ist, die aber Bedingungen wie etwa  $X^2 = X$  und  $XY = Y$  erfüllen, so arbeiten wir mit einer speziellen Algebra. Die Bedingungen, die meist gestellt werden, sind überaus restriktiv<sup>1</sup> und je nach Problemstellung verschieden, um Rechnungen so vereinfachen zu können, daß man wirklich durchgreifende, auch für den Anwender befriedigende Ergebnisse erhält. Derartige Rechnungen sind meist solche in Vektorräumen: man arbeitet mit Operatoren (wie Integraloperatoren, Differentialoperatoren), von denen man weiß, daß sie gewisse Rechenregeln, eben die der betrachteten Algebra, erfüllen, und man erhält so eine Darstellung dieser Algebra: eine Realisierung dieser Algebra durch Operatoren auf einem Vektorraum.

Ausgehend von einer Algebra (also einem derartigen Rechensystem mit Addition und Multiplikation) kann man (und muß man) nach *allen* möglichen Darstellungen fragen; insbesondere wird man daran interessiert sein, welche Darstellungen "unzerlegbar" sind, um die übrigen in ihre unzerlegbaren Bestandteile zu zerlegen. Da eine Darstellung nichts anderes als ein Vektorraum ist, auf dem die Algebra operiert, sucht man nach Unterräumen, die unter dieser Operation invariant sind. Die Unzerlegbarkeit einer Darstellung bedeutet gerade, daß sich der zugrunde liegende Vektorraum nicht als direkte Summe zweier nicht-trivialer invarianter Unterräume schreiben läßt. Da wir uns auf endlich-dimensionale Darstellungen beschränken, besitzt jede Darstellung eine endliche, nicht verfeinerbare Filtrierung durch invariante Unterräume, sie ist, wie man sagt, von endlicher Länge. Die möglichen endlich-dimensionalen Darstellungen bilden also die Objekte einer sogenannten

---

<sup>1</sup> Um ein typisches, nicht zu kompliziertes System vor Augen zu haben, könnte man an folgendes denken: betrachtet werden 3 Variable  $X, Y, Z$ , und es sollen die Bedingungen  $ZX = X = X - XZ, ZY = Y = YZ, Y^4 = 0, Y^2X = 0, Z^2 = Z$  gelten; übliche Formelmanipulation zeigt leicht, daß die durch diese Bedingungen definierte Algebra 7-dimensional ist.

”Längenkatgorie”. Ähnliche Längenkatgorien treten in vielen Teilgebieten der Mathematik auf, und man kann zeigen, daß sich alle Längenkatgorien als Katgorien von Darstellungen von Algebren interpretieren lassen, auch wenn sie primär in ganz anderer Weise konstruiert worden sind.

### **Auslander-Reiten-Köcher**

Aufgabe der Darstellungstheorie ist es also, die unzerlegbaren Objekte einer gegebenen Längenkatgorie zu klassifizieren und durch Invarianten zu identifizieren. Man wird als erstes versuchen, eine möglichst lange Liste unzerlegbarer (und paarweise verschiedenartiger) Objekte aufzustellen, und fragt sich dann, ob die Liste vollständig ist. Früher gab es hierzu nur folgenden Zugang: man zeigte, daß sich jedes beliebige Objekt als Summe von Objekten aus der Liste darstellen läßt – ein ziemlich aufwendiges Verfahren, das selbst bei kleinen Beispielen einen unvorstellbaren Rechenaufwand benötigte. Insbesondere muß man dabei mit Objekten beliebig hoher Dimension arbeiten, selbst wenn die Objekte der Liste alle niedrig-dimensional sind. Ergebnisse von Maurice Auslander und Idun Reiten vor 20 Jahren haben hier einen grundsätzlichen Wandel gebracht.

Man ordnet jeder Längenkatgorie einen gerichteten Graphen zu, den sogenannten *Auslander-Reiten-Köcher*. Ein gerichteter Graph ist eine Ansammlung von Pfeilen, daher auch die Bezeichnung ”Köcher”. Man erhält den Auslander-Reiten-Köcher einer Längenkatgorie auf folgende Weise: nehmen wir einmal an, man kenne schon alle unzerlegbaren Objekte einer Längenkatgorie. Man faßt diese unzerlegbaren Objekte als mögliche Endpunkte von Pfeilen eines Köchers auf (isomorphe Objekte, das heißt Objekte, die die gleiche Struktur besitzen, sollen dabei nicht unterschieden werden). Zwischen zwei solchen Punkten wird nun immer dann ein Pfeil gezeichnet, wenn es zwischen den zugehörigen Objekten einen bestimmten Typ von Abbildungen (sogenannte irreduzible Abbildungen) gibt. Was man auf diese Weise erhält, ist ein gerichteter Graph, in dem zusätzlich noch sogenannte Maschen ausgezeichnet sind (gewisse Paare von Pfeilen gehören zu den von Auslander und Reiten entdeckten ”fast-zerfallenden Folgen”, und man markiert diese Paare im Auslander-Reiten-Köcher). Ein Köcher mit einer derartigen Maschenstruktur wird Translationsköcher genannt. Diese Translationsköcher bilden diskrete Analoga von Längenkatgorien, und es ist überraschend, wieviel Information der Auslander-Reiten-Köcher einer Längenkatgorie über diese speichert. In vielen Fällen ist es sogar möglich, die Längenkatgorie aus ihrem Auslander-Reiten-Köcher und der Kenntnis des Grundkörpers zurückzugewinnen. Hier sind wir also in der schönen Situation, daß wir statt der großen und unübersichtlichen Längenkatgorie mit einer sehr viel einfacheren diskreten Struktur arbeiten können.

Die Abbildung 3 zeigt den Auslander-Reiten-Köcher für eine spezielle Längenkatgorie. Es handelt sich dabei um eine Katgorie von Vektorräumen mit gewissen Zusatzstrukturen.<sup>2</sup> Auf den ersten Blick mag dieser Translationsköcher ebenfalls

---

<sup>2</sup> Für mathematisch versierte Leser: Die Objekte dieser Längenkatgorie sind

recht unübersichtlich erscheinen, aber immerhin erkennt man einen Zylinder, an dessen Oberkante ein verdrilltes Band (ein Möbiusband) mit einer Nase verheftet ist. Dennoch ist dieser Translationsköcher ein recht einfaches Modell: im Gegensatz zur Längenkategorie mit ihren unendlich vielen Objekten haben wir nur 28 Punkte und 41 Pfeile vor Augen.

Nun sind wir oben davon ausgegangen, daß man schon alle unzerlegbaren Objekte kennt, aber das wird üblicherweise gerade nicht der Fall sein. Im Gegenteil, Ziel vieler Untersuchungen im Rahmen des Sonderforschungsbereichs ist es gerade, Auslander-Reiten-Köcher von Längenkategorien zu konstruieren, über die sehr wenig Information vorliegt. Hat man diesen Translationsköcher erst einmal bestimmt, so wissen wir ja, daß man an ihm ablesen kann, wieviele unzerlegbare Objekte es gibt, welche Beziehungen zwischen ihnen herrschen, welche Abbildungen es gibt: genau die Daten, an denen man interessiert ist. Wie aber tastet man sich an solch ein unbekanntes Ding heran? Zuerst einmal gibt es immer partielle Information über Teilstücke des Translationsköchers; es gibt Reduktionsverfahren, die Auslander-Reiten-Köcher verschiedener Längenkategorien zueinander in Beziehung setzen, es gibt Algorithmen, mit denen man verifizieren kann, ob ein Translationsköcher überhaupt Auslander-Reiten-Köcher einer Längenkategorie sein kann.

### **Die Struktur von Translationsköchern – Rückschlüsse auf die Eigenschaften von Längenkategorien.**

Die Untersuchung von Längenkategorien führt also auf die diskrete Struktur der Translationsköcher. Für diese sind in den letzten Jahren einige Struktursätze bewiesen worden, die wiederum Rückschlüsse auf Eigenschaften von Längenkategorien erlauben. Zum Beispiel gibt es enge Zusammenhänge zwischen Translationsköchern und den sogenannten Dynkin-Diagrammen. Dynkin-Diagramme sind sehr einfache Graphen (also wieder diskrete Modelle), die an vielen Stellen in der Mathematik auftauchen (zum Beispiel bei der Klassifikation der sogenannten einfachen komplexen Lie-Algebren, die in der theoretischen Physik von Bedeutung sind). Die Frage nach dem Grund für das häufige Auftreten dieser Graphen ist

---

Quadrupel  $(V, W, \xi, \eta)$ , wobei  $V$  und  $W$  Vektorräume, und  $\xi : V \rightarrow W, \eta : W \rightarrow W$  lineare Transformationen sind, die folgende Bedingungen erfüllen:  $\eta^4 = 0, \eta^2\xi = 0$ ; im wesentlichen ist also  $W$  ein Vektorraum gegeben,  $V$  ist ein Unterraum von  $W$ , und  $\eta$  ist ein nilpotenter Endomorphismus von  $W$ , der einschneidenden algebraischen Bedingungen unterworfen ist. Würde man hier keine, oder weniger restriktive Bedingungen an  $\eta$  vorschreiben, so könnte man keine effektive Beschreibung erhoffen, weil das Klassifikationsproblem viel zu kompliziert wäre. Die Klassifizierung der unzerlegbaren Objekte  $(V, W, \xi, \eta)$  liefert nun Normalformen für solche Quadrupel: wie erhalten auf diese Weise ziemlich kanonische Basen für die gegebenen Vektorräume. – Es handelt sich bei diesem Beispiel gerade um die Darstellungen der in Fußnote (1) erwähnten Algebra: während  $Z$  hier als Projektionsoperator auf  $V \oplus W$  mit Bild  $W$  operiert, sind  $X$  und  $Y$  durch die linearen Transformationen  $\xi$  und  $\eta$  realisiert.

eine große Herausforderungen an die Mathematiker. Die Abbildung 4 zeigt einige dieser Dynkin-Diagramme und die zugehörigen Translationsköcher. Die Dynkin-Diagramme können hier als die Baupläne dieser Translationsköcher aufgefaßt werden. Christine Riedtmann konnte 1980 zeigen, daß große Teile eines endlichen Auslander-Reiten-Köchers immer von Dynkin-Diagrammen herkommen.

Neuere Untersuchungen von Translationsköchern ziehen quadratische Formen und deren Wurzeln heran (quadratische Formen sind recht einfache algebraische Ausdrücke, nämlich Linearkombinationen quadratischer Terme, wie  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3$ , vgl. Abbildung 5). Da die bei endlichen Translationsköchern auftretenden quadratischen Formen "schwach positiv" sind (also positive Werte auf positiven Vektoren liefern), kann man auf einen schönen Satz, den Sergej Ovsienko 1978 bewiesen hat, zurückgreifen: Die Koordinaten der positiven Wurzeln solcher Formen sind durch 6 nach oben beschränkt, es treten also nur wirklich kleine Zahlen auf. Daraus folgt aber, daß in Längenkategorien mit endlich vielen unzerlegbaren Objekten gewisse Multiplizitäten durch 6 beschränkt sind. Analysiert man den kompliziertesten Fall, wo 6 als Multiplizität wirklich auftritt, genauer, so stellt sich heraus, daß dies einschneidende Bedingungen an die auftretenden quadratischen Formen, und damit natürlich auch an die möglichen Längenkategorien, nachsichzieht.

Die Verwendung diskreter Methoden ist innerhalb der Darstellungstheorie zu einem unverzichtbaren Hilfsmittel geworden. Ermöglicht wurde dadurch das Berechnen aller Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte in vielfältigen Längenkategorien. Das so gewonnene Material hat viele neue und überraschende Phänome in den Blickwinkel der Forscher gerückt und Fragen, die unangreifbar schienen, einer theoretischen Betrachtungsweise zugänglich gemacht.

---

### Die zugehörigen Abbildungen:

Abbildung 1: Eine Kurve 4.Ordnung (die vier schwarzen Nieren) mit ihren 28 Doppeltangenten (rot gezeichnet). Jede Niere besitzt eine Doppeltangente (a), zu je zwei Nieren gibt es zusätzlich vier Doppeltangenten - zwei außen, zwei überkreuz innen (b). Bei vier Nieren (also 6 Paaren von Nieren) erhält man  $4 + 6 \cdot 4 = 28$  Doppeltangenten.

Abbildung 2: Eine kubische Fläche aus der Bielefelder Sammlung mathematischer Modelle. Auf kubischen Flächen liegen im allgemeinen genau 27 Geraden (sie sind hier rot eingezeichnet). Diese Geraden zeigen ein merkwürdiges Schnittverhalten: jede solche Gerade schneidet genau 10 der übrigen.

Abbildung 3: Ein Auslander-Reiten-Köcher. Man erkennt einen Zylinder, an dessen Oberkante ein verdrilltes Band (ein Möbiusband) mit einer Nase verheftet

ist. Die Punkte entsprechen gewissen Darstellungen einer Algebra, man erhält die Kategorie aller Darstellungen als Maschenkategorie dieses Translationsköchers.

Abbildung 4: Die Dynkin-Diagramme  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$  (links) und die zugehörigen Translationsköcher (rechts): in jedem Translationsköcher ist ein Untergraph rot markiert, der gerade die Form des Dynkin-Diagramms hat; durch Verschieben nach links und nach rechts erhält man offensichtlich alle Punkte (und die Hälfte der Pfeile) des Translationsköchers.

Abbildung 5: Die universelle Überlagerung zum Translationsköcher  $\Gamma(\mathcal{A})$  der Abbildung 3, oder zumindest ein Teil. Nach links und rechts denke man sich den Köcher periodisch fortgesetzt. Ein Fundamentalbereich ist schraffiert, wir erhalten  $\Gamma(\mathcal{A})$  zurück, indem wir beim Fundamentalbereich die markierten Kanten miteinander verheften.

Abbildung 6: Eine quadratische Form, die aus dem Graphen  $E_8$  durch Aufspalten der einzelnen Punkte mit Ausnahme des Zentrums entsteht. Sie wurde von Ostermann und Pott entdeckt und ist die einzige gschwach positive ganze quadratische Form in 24 Unbestimmten, die eine aufrichtige positive Wurzel mit 6 als Koordinate besitzt.