Geraden - Stäbe - Puzzles.

Denkspiele aus aller Welt (7)

(Zusammenfassung)

Claus Michael Ringel

Es gibt recht viele Denkspiele, Gedulds- und Geschicklichkeitsspiele, die einen mathematischen Hintergrund besitzen. Das Verständnis der jeweiligen mathematischen Grundprinzipien gibt dem Mathematiklehrer die Möglichkeit, derartige Materialen gezielt im Unterricht einzusetzen, um auf diese Weise Grundbegriffe der Mathematik anschaulich zu erläutern. Wie in den vergangenen Vorträgen sollen auch in diesem wieder einige interessante Puzzles und entsprechende mathematische Modelle beschrieben werden; diesmal unter dem Oberthema

Geraden-Konfigurationen im Raum.

Zum einen sollte man dabei sofort an Polyeder denken, aber auch an Fullerene und Tensegrities. Im letzten Jahr wurden Polyeder als topologische Gebilde betrachtet, diesmal wenden wir uns den jeweiligen Geradenrichtungen zu. Herausgearbeitet werden Fragestellungen der linearen Algebra wie der Raumgeometrie, vor allem aber interessieren wir uns für die auftretenden Symmetrie-Gruppen. Die im Vortrag vorgestellten Materialien, insbesondere eine Fülle von Illustrationen, findet man im Internet unter der Adresse

http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/∼ringel/puzzle/puzzle04/Welcome.htm

1. Fullerene: Konvexe Polyeder aus Fünfecken und Sechsecken. Beginnen wir mit folgender Frage: Gibt es konvexe Polyeder aus Sechsecken? Die Antwort ist nein, wenn wir fordern, dass die Sechsecke regulär sind. Denn reguläre Sechsecke können nur planar zusammengesetzt werden. Aber: Aus Sechsecken können wir Röhren fertigen, demnach auch einen Torus. Warum nicht ein konvexes Polyeder?

Betrachtet man einen Golfball, so hat man den Eindruck, dass seine Oberfläche eine Sechseck-Struktur besitzt. Und es gibt Bilder von kugelförmigen Wespenwaben (oder auch von Klein-Organismen wie Radiolarie Heliosphaera actinota), die den gleichen Eindruck erwecken. Schließlich sei an den amerikanischen Pavillon der Expo ′67 in Montreal erinnert: eine gigantische Halbkugel, von Buckminster Fuller konzipiert: auch hier sind es Sechsecke, die dominieren. Und dennoch kann man beweisen, dass es bei all diesen Konstruktionen immer auch Fünfecke geben muss:

SEDIMA-Vortrag, Bielefeld, Dezember 2004.

Bildet man aus Fünfecken und Sechsecken ein konvexes Polyeder, und setzt man voraus, dass in jeder Ecke genau drei Flächen aneinanderstoßen, so braucht man genau 12 Fünfecke. Der Beweis beruht auf der Euler'schen Polyederformel: Ist F die Anzahl der Flächen, K die der Kanten, E die der Ecken, so gilt

$$F - K + E = 2$$

(wie bei den platonischen Körpern, aber eben auch bei allen anderen konvexen Polyedern). Sei also x die Anzahl der Sechsecke, y die der Fünfecke. Dann gilt:

$$F = x + y, \quad K = \tfrac{1}{2}(6x + 5y), \quad E = \tfrac{1}{3}(6x + 5y).$$

Wie zählt man zum Beispiel die Kanten? Jedes Sechseck hat 6 Kanten, jedes Fünfeck hat 5 Kanten; legt man also die Fünfecke und die Sechsecke einzeln nebeneinander, so hat man $6x+5y$ Kanten; bei unserem Polyeder gehört jede Kante zu genau zwei Flächen, daher der Faktor $\frac{1}{2}$. Entsprechend folgt aus der Bedingung, dass in jeder Ecke drei Flächen aneinanderstoßen, dass bei der Berechnung von E der Faktor $\frac{1}{3}$ auftritt. Insgesamt sehen wir:

$$\begin{aligned} 2 = F - K + E &= (x + y) - \tfrac{1}{2}(6x + 5y) + \tfrac{1}{3}(6x + 5y) \\ &= \tfrac{1}{6}(6x + 6y - 18x - 15y + 12x + 10y) = \tfrac{1}{6}y, \end{aligned}$$

also $y = 12$. Und wenn man zulässt, dass in einzelnen Ecken mehr als 3 Flächen aneinanderstoßen, so sieht man mit der gleichen Rechnung, dass $y \geq 12$ gelten muss! Es gibt gegebenenfalls also noch mehr Fünfecke!

Erstes Beispiel ist das Dodekaeder: 12 Fünfecke, kein zusätzliches Sechseck. Von besonderer Bedeutung ist das abgestumpfte Ikosaeder: beim Abstumpfen der Ecken entstehen regelmäßige Fünfecke, die Dreiecksflächen werden zu regelmäßigen Sechsecken: ingesamt gibt es also 12 Fünfecke und 20 Sechsecke. Es ist dies der Fußball, üblicherweise mit schwarzen Fünfecken und weißen Sechsecken.

Das abgestumpfte Ikosaeder mit seinen 60 Ecken spielt auch in der Chemie eine wichtige Rolle, man nennt es das Buckminsterfulleren C_{60}. Ganz allgemein werden in der Chemie konvexe Polyeder, die aus Fünfecken und Sechsecken bestehen, **Fullerene** genannt, sie bilden neben Graphit und Diamant eine dritte mögliche Kohlenstoff-Modifikation. Die Sechsecke sind dabei Benzolringe (ein Benzolring ist ein besonders stabiler Ring aus sechs Kohlenstoffatomen, der abwechselnd drei C-C-Doppel- und drei C-C-Einfach-Bindungen enthält). Es handelt sich bei diesen Modifikationen um ein besonders treffendes Beispiel, wie sehr der molekulare Aufbau chemischer Stoffe entscheidend für die jeweiligen Eigenschaften ist. Für die Entdeckung dieser Fullerene wurde 1996 der Nobelpreis für Chemie an Curl, Kroto und Smalley verliehen. Neben C_{60} lassen sich zum Beispiel auch Moleküle der Form C_{80} (mit 12 Fünfecken und 30 Sechsecken) konstruieren (man nennt diese Fullerene auch *buckyballs*, im Gegensatz zu röhrenförmigen Molekülen, die nur Sechsecke verwenden, die sogenannten *buckytubes*).

Verwiesen sei hier auf *Prof. Blumes Bildungsserver für Chemie,* der sehr viel Informationen gerade über Fullerene bereitstellt, siehe `http://dc2.uni-bielefeld.de/dc2/fullerene/`, mit Bastelbögen um Polyeder der Form C_{60} und C_{80} zu bauen. Insbesondere findet man unter `http://dc2.uni-bielefeld.de/dc2/fullerene/full_02.htm` Materialien für einen fächerübergreifenden Unterricht.

2. Tensegrities. Auch dieses Thema ist mit dem Namen Richard Buckminster Fuller (1895-1983) verbunden. Von seinem Schüler Kenneth Snelson (1927-) stammen die ersten "Tensegrities": Er nannte sie *Continuous Tension, Discontinuous Compression Structures* und Fuller hat dafür die Bezeichnung *Tensegrities* gewählt, als Kontraktion von *Tensional Integrity.* Snelson war Künstler und hat hunderte Tensegrity-Skulpturen geschaffen. Hier ein Zitat aus dem Buch *Synergetics* von Fuller: *Tensegrity describes a structural-relationship principle in which structural shape is guarenteed by the finitely closed, comprehensively continuous, tensional behaviors of the system and not by the discontinuous and exclusively local compressional member behaviors. Tensegrity provides the ability to yield increasingly without ultimately breaking or coming asunder.* (p.372).

Bei den Tensegrities handelt es sich um Stäbe (aus Holz oder Metall), die frei im Raum zu schweben scheinen und nur durch Fäden zusammengehalten werden. Hört man zum ersten Mal diese Beschreibung, so zweifelt man, ob es überhaupt möglich sein kann, Stäbe durch das Straffspannen von Fäden auf Abstand zu halten, man braucht ja jeweils Kräfte in entgegengesetzter Richtung. Tensegrities mit nur zwei Stäben kann es nicht geben, schon aber solche mit drei Stäben. Hier die einfachste Bauanleitung: Wir beginnen mit drei Stäben A, B, C, mit Enden A_1, B_2, C_1 (oben) und A_2, B_2, C_2 (unten), sie seien oben und unten jeweils durch Fäden verbunden, oben also A_1 mit B_1, zweitens B_1 mit C_1, schließlich C_1 wieder mit A_1, und entsprechend unten. Eine derartige Geraden-Konfiguration ist natürlich völlig labil, vorgegeben ist ja nur der Maximalabstand zwischen den oberen Enden, und der zwischen den unteren Enden. Nun verbinden wir zusätzlich A_1 mit B_2, B_1 mit C_2 und C_1 mit A_2 und ziehen diese neuen Verbindungsfäden so straff wie möglich. Das ist schon alles! Denn beim Straffziehen werden die oberen Enden auseinander gezogen, die unteren Enden ebenfalls, wir erreichen auf diese Weise einen stabilen Zustand - eben ein Tensegrity.

Die Fulleren-Konstruktionen, wie auch die Tensegrities sind sehr stabile Konstruktionen mit äußerst geringem Material-Aufwand. Dies macht ihre Bedeutung für Architekten aus!

3. Holzpuzzles mit mehreren Drehachsen. Es gibt eine Vielzahl von Holzpuzzles, die mehrere Drehachsen besitzen, dabei interessieren wir uns hier für Symmetrieachsen die zu Drehungen mit Ordnung mindestens 3 gehören. Es wird sich zeigen, dass es nur ganz wenige derartige Symmetriegruppen gibt! Und auch, dass die jeweiligen Symmetrieachsen ganz spezielle Geraden-Konfigurationen bilden!

Einschub: Die endlichen Bewegungsgruppen des $\mathbb{R}^3$. Unter (eigentlichen) Bewegungen des $\mathbb{R}^3$ versteht man Drehungen und Translationen und deren Hintereinanderschaltungen, also Bijektionen des $\mathbb{R}^3$, die abstandserhaltend, aber auch (im Gegensatz zu Spiegelungen) orientierungserhaltend sind. Sei G eine endliche Gruppe von Bewegungen des $\mathbb{R}^3$, sei N die Ordnung von G (also die Anzahl der Elemente). Als erstes stellt man fest, dass es in G keine Translationen geben kann, denn sonst wäre G nicht endlich. Auch sieht man leicht, dass es einen Fixpunkt für alle g in G geben muss (eine Art "Schwerpunkt"). Nimmt man ihn als Ursprung eines Koordinatensystems, so wird jedes g in G durch eine orthogonale Matrix beschrieben. Insbesondere gilt: Jedes g in G ist eine Drehung mit einer Achse $A(g)$, die durch den Ursprung geht. Für jedes $g \neq 1$ in G markieren wir die Schnittpunkte der Achse $A(g)$ mit der Einheits-Sphäre S^2: dies liefert zwei Punkte auf S^2, man nennt sie die zugehörigen *Pole*.

Sei P die Menge der Pole. Für jedes p in P bilden die Drehungen mit Pol p eine zyklische Untergruppe von G, sei r_p die Ordnung dieser Untergruppe. Abzählen liefert

$$\sum\nolimits_{p\in P}(r_p - 1) = 2(N-1)$$

(jedes Element $g \neq 1$ wird links und rechts jeweils zweimal betrachtet).

Die Gruppe G operiert auf P und zerlegt P in "Bahnen" $P_1, ..., P_t$. Pole p, die zur gleichen Bahn P_i gehören, haben gleiche Ordnung $r_p =: r_i$. Da die Bahn P_i die Kardinalität N/r_i hat (dies folgt aus dem "Fundamentallemma": Gruppenordnung = Bahnenlänge × Stabilisatorordnung.) können wir unsere Gleichung umschreiben:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{t} \frac{N}{r_i}(r_i - 1) = 2(N-1)$$

Teilen wir durch N, so erhalten wir:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{t}\Big(1 - \frac{1}{r_i}\Big) = 2 - \frac{2}{N}.$$

Für die Summanden links gilt: $1/2 \le (1 - 1/r_i) < 1$. Rechts gilt $1 \le 2 - 2/N < 2$. Also gibt es links entweder 2 oder 3 Summanden; es ist also $t = 2$ oder $t = 3$.

1.Fall: $t = 2$. Dann lautet unsere Gleichung: $(1-1/r_1)+(1-1/r_2) = 2-2/N$, also

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{N}.$$

Da jedes r_i ein Teiler von N ist, folgt $r_1 = r_2 = N$. Demnach gibt es genau zwei Pole: sie liegen einander gegenüber, und gehören zur einzigen Drehachse. Also gilt: G ist eine zyklische Gruppe.

2.Fall: $t = 3$. Wir erhalten dann

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1 + \frac{2}{N}.$$

Mit etwas Knobeln zeigt man, dass es nur die folgenden Möglichkeiten gibt:

	r_1	r_2	r_3	N	G
	2	2	n	$2n$	Diedergruppe
(*)	2	3	3	12	Tetraedergruppe
	2	3	4	24	Oktaedergruppe
	2	3	5	60	Ikosaedergruppe

Auch im Fall der Diedergruppen gibt es nur eine Drehachse mit Ordnung mindestens 3 (es gibt ein zugehöriges Puzzle: *Triamant*); dagegen gibt es in den restlichen Fällen jeweils mehrere Drehachsen mit Ordnung mindestens 3.

Auswertung. Insgesamt sehen wir: Gibt es mindestens zwei Drehachsen der Ordnung mindestens 3, so liegt einer der folgenden drei Fälle vor:

r_1	r_2	r_3	N	G	N/r_1	N/r_2	N/r_3
2	3	3	12	Tetraedergruppe	6	4	4
2	3	4	24	Oktaedergruppe	12	8	6
2	3	5	60	Ikosaedergruppe	30	20	15

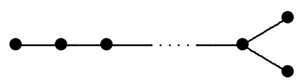
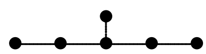
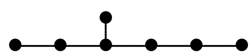
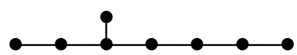
Die letzten drei Spalten geben für Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder die Anzahl der Kanten, Flächen und Ecken an. Man beachte: die Kanten liefern Drehachsen der Ordnung 2, die Flächen und Ecken liefern Drehachsen der Ordnung $r_i \geq 3$.

Zurück zu den Holzpuzzles mit mehreren Drehachsen: Die obige Tabelle zeigt, um welche Symmetriegruppe es sich jeweils handelt. Gibt es zum Beispiel eine Drehachse der Ordnung 3 und eine Drehachse der Ordnung 4, so handelt es sich um die Oktaedergruppe, also die Symmetriegruppe eines Würfels — und die Geradenrichtungen der Drehachsen der Ordnung 3 sind gerade die Richtungen der Würfeldiagonalen!

Es gibt nur vier verschiedene Geraden-Konfigurationen, die als Drehachsen mit Ordnung mindestens drei auftreten können:

- 3 Achsen der Ordnung 4: dabei handelt es sich gerade um die Koordinatenachsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems (und damit um die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken eines Oktaeders).
- 4 Achsen der Ordnung 3: am leichtesten konstruierbar als die Richtungen der Raumdiagonalen eines Würfels (und dies sind die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken eines Würfels).
- 6 Achsen der Ordnung 5: die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken eines Ikosaeders.
- 10 Achsen der Ordnung 3: die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken eines Dodekaeders.

Zusatz: Die obige Tabelle (∗) spielt in der Mathematik an vielen (ganz verschiedenen) Stellen eine herausragende Rolle, so in in der Lie-Theorie, in der Theorie der algebraischen Gruppen, wie der der endlichen Gruppen, in der Singularitäten-Theorie, in der Darstellungstheorie von Algebren usw. Oft ordnet man den Zahlenfolgen $(2, 2, n), (2, 3, 3), (2, 3, 4)$ und $(2, 3, 5)$ Graphen zu (man nennt sie die zugehörigen *Dynkin-Diagramme*) und zwar wie folgt:

2	2	n		D_{n+2}
2	3	3		E_6
2	3	4		E_7
2	3	5		E_8

Im Buch *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* von Felix Klein (publiziert 1884), erscheint die Tabelle ($*$) (jeweils nur wenig modifiziert) auf den Seiten 21, 62, 119, 129.

4. Die Schläfli'sche Doppelsechs. Wir beginnen mit folgenden Fragen:

- Gibt es 12 Geraden im Raum, sodass jede Gerade genau 5 der anderen schneidet?
- Gibt es 27 Geraden im Raum, sodass jede Gerade genau 10 der anderen schneidet?

Viele ähnliche Fragen könnte man stellen, meist allerdings sollte die Antwort "nein" sein. Die Schläfli'sche Doppelsechs (benannt nach Ludwig Schläfli, 1814-1895) ist Lösung des 12-er Problems, sogar mit folgendem Zusatz: Wir teilen die 12 Geraden in zwei gleichgroße Teilmengen: wir suchen etwa 6 rote und 6 blaue Geraden, und verlangen: jede rote Gerade schneide genau 5 blaue Geraden, jede blaue Gerade schneide genau 5 rote Geraden.

Auch das 27-er Problem besitzt eine Lösung: die 27 Geraden auf einer kubischen Fläche in allgemeiner Lage! Während es allerdings nicht ganz einfach ist, ein Modell dieser 27 Geraden zu konstruieren, kann man eine Schläfli'sche Doppelsechs problemlos herstellen: man beginnt mit einem Würfel mit Kantenlänge 4, sagen wir mit den Ecken 1,2, ... ,8 und mit Kanten 12, 23, 34, 41; 15, 26, 37, 48; 56, 67, 78, 85. Wir markieren nun 4 Ecken, die paarweise nicht benachbart sind, etwa 1, 3, 6, 8. Auf jeder Kante a liegt genau eine dieser markierten Ecken, sei dies die Ecke $E(a)$. Wir bezeichnen mit $P(a)$ den Punkt auf der Kante a, der den Abstand 1 von der Ecke $E(a)$ hat. Auf jeder Würfelfläche sind auf diese Weise 4 Punkte der Form $P(a)$ gegeben. Wir verbinden sie paarweise, und zwar durch Geraden durch die Flächenmittelpunkte: eine dieser Geraden wird rot gefärbt, die andere blau, und zwar mit der Maßgabe, dass sich rote Geraden untereinander nicht schneiden (dann schneiden sich auch die blauen Geraden nicht). Es ist nun leicht zu sehen, dass eine rote Gerade fünf der blauen Geraden schneidet: rot-blaue Geradenpaare, die sich nicht schneiden, liegen auf gegenüberliegenden Würfelflächen.

Es gibt einen interessanten Zusammenhang zwischen dem 12-er und dem 27-er Problem: Betrachtet man die 27 Geraden auf einer kubischen Fläche in allgemeiner Lage, so gibt es genau 36 Teilmengen dieser 27 Geraden, die eine Schläfli'sche Doppelsechs bilden (all dies steht schon im alten Algebra-Lehrbuch von Heinrich Weber).

Quellen:

- Michael Artin: Algebra.. Birkhäuser 1993. Insbesondere: 5.9. Endliche Untergruppen der Drehgruppe.
- Stewart T. Coffin: The Puzzling World of Polyhedral Dissections
- David Hilbert, Stefan Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie. Springer 1932.
- Felix Klein: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Garde. Teubner 1884.
- Heinrich Weber: Lehrbuch der Algebra, Band 2. 1890.