SS 2021
M. Röckner

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 12
Abgabe: Freitag, 09.07.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine offene, beschränkte Menge und* $V \in L^1(\Omega)$ *mit* $V \geqslant 0$. *Beweisen Sie, dass durch* $\mathring{H}_V^{1,2} := \{f \in \mathring{H}^{1,2} \mid \int V f^2 < \infty\}$ *und*

$$(f,g)_{1,2,V} := \int \nabla f \cdot \nabla g + \int (1+V) f \cdot g$$

ein Hilbertraum definiert wird. *(4 Punkte)*

Aufgabe 2.
Sei $\mathbb{B}$ *ein* σ*-Ring auf einer Menge* S *und* $\lambda \colon \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ σ*-additive und beschränkt. Beweisen Sie mit Hilfe der Hahn–Zerlegung: Es gibt* σ*-additive, beschränkte Maße* $\lambda^+, \lambda^- \colon \mathbb{B} \to \mathbb{R}_+$ *mit den Eigenschaften*

- $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$
- $|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-$
- $\lambda^+(E) = \sup\limits_{A \subseteq E,\ A \in \mathbb{B}} \lambda(A)$ *für alle* $E \in \mathbb{B}$
- $\lambda^-(E) = -\inf\limits_{A \subseteq E,\ A \in \mathbb{B}} \lambda(A)$ *für alle* $E \in \mathbb{B}$

(4 Punkte)

Aufgabe 3.
Sei $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ *ein Maßraum, wobei* λ *ein* σ*-endliches Maß auf* $\mathcal{F}$ *ist. Seien* ν_1, ν_2 *zwei* σ*-endliche Maße auf* $\mathcal{F}$ *mit* $v_1 \ll \lambda$ *und* $v_2 \ll \lambda$. *Setze* $\nu := \nu_1 + \nu_2$. *Beweisen Sie, dass* $\nu \ll \lambda$ *und dass* $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\lambda}$ *fast sicher auf* X *gilt.* *(4 Punkte)*

Aufgabe 4.
Sei $X = (0,1]$ *und* λ_1 *das Lebesguemaß auf* $\mathbb{R}$. *Sei* μ *ein Maß auf* X *so dass* $\mu((0,x]) = 2^x - 1$ *gilt. Beweisen Sie, dass* $\mu \ll \lambda_1$ *und berechnen Sie* $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda_1}$. *(4 Punkte)*