SS 2021
M. Röckner

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 6
Abgabe: Freitag, 28.05.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei $p \in (1,\infty)$. Sei $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $g \in L^q(\mathbb{R})$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Beweisen Sie, dass $f * g$ eine stetige Funktion ist. *(4 Punkte)*
Hinweis: $C_c(\mathbb{R})$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R})$ und $L^q(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2.
Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geqslant 0$ und $\int \varphi = 1$. Setze

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$$

die Dirac-Folge zu φ. Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie, dass $\lim_{\varepsilon\to 0} f*\varphi_\varepsilon = f$ gleichmässig auf kompakten Mengen konvergiert, d.h.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in K}|(f*\varphi_\varepsilon)(x)-f(x)| = 0$$

für alle $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. *(4 Punkte)*

Aufgabe 3.
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen, $p \in [1,\infty)$, $p' \in [1,\infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Beweisen Sie, dass für $f \in H^{m,p}(\Omega)$ und $g \in H^{m,p'}(\Omega)$

$$fg \in H^{m,1}(\Omega)$$

und

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}f\partial^\beta g$$

gilt. *(4 Punkte)*

Aufgabe 4.
Sei $\Omega, \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\tau\colon \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein C^m-Diffeomorphismus wobei die Funktionalmatrizen $D\tau$ und $D\tau^{-1}$ beschränkt sind. Sei $f \in H^{m,p}(\Omega)$. Beweisen Sie, dass $f\circ\tau \in H^{m,p}(\tilde{\Omega})$. *(4 Punkte)*
Hinweis: Die schwache Ableitung berechnet sich nach der Kettenregel.