SS 2021
M. Röckner

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 7
Abgabe: Freitag, 04.06.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei L ein ein-dimensionaler Unterraum eines Hilbertraumes H und $0 \neq a \in L$. Beweisen Sie, dass für jedes $x \in H$

$$\operatorname{dist}(x, L^\perp) = \frac{|(x,a)|}{\|a\|}$$

gilt. *(4 Punkte)*

Aufgabe 2.
Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\varphi \geqslant 0$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq B_1(0)$ und $\int \varphi = 1$. Für $\varepsilon > 0$ sei $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ die entsprechende Dirac-Folge. Sei weiterhin

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} -\varepsilon, & x < \varepsilon \\ x, & x \in [-\varepsilon, 1+\varepsilon] \\ 1+\varepsilon, & x > 1+\varepsilon \end{cases}$$

und $\Phi_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * f_\varepsilon$. Beweisen Sie, dass

$$\Phi_\varepsilon(x) = x, \quad \forall x \in [0,1],$$

$$-\varepsilon \leqslant \Phi_\varepsilon(x) \leqslant 1+\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und für $y \leqslant x$

$$0 \leqslant \Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(y) \leqslant x - y.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \geqslant 0$. Sei $M_a := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p \mid |x_n| \leqslant a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Beweisen Sie, dass für $1 \leqslant p < \infty$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ die Menge M_a kompakt ist. *(4 Punkte)*

Aufgabe 4.
Beweisen Sie: Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X,d) ist präkompakt genau dann, wenn der Abschluss von A in der Vervollständigung $(\bar{X}, \bar{d})$ von (X,d) kompakt ist. *(4 Punkte)*