Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 8
Abgabe: Freitag, 11.06.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei L ein Untervektorraum eines Hilbertraumes H und

$$L^\perp := \{x \in H \mid (x,y)_H = 0,\ \forall y \in L\}.$$

Beweisen Sie, dass
a) Für jedes $x \in H$ existiert genau ein $x_L \in \bar{L}$ und genau ein $x_{L^\perp} \in L^\perp$, so dass

$$x = x_L + x_{L^\perp}$$

b) $H = \bar{L} \Leftrightarrow L^\perp = \{0\}$
c) $\overline{C_c^0(\mathbb{R}^n)}^\perp = \{0\}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ *(4 Punkte)*

Aufgabe 2.
Sei $a < b$ und E die Einheitskugel in $H^1((a,b))$. Beweisen Sie, dass E präkompakt in $L^2((a,b))$ ist.
(4 Punkte)

Aufgabe 3.
Sei $O(n)$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ mit $1 < p < \infty$ und $f_A(x) := f(A^{-1}x)$. Beweisen Sie, dass

$$K_f := \{f_A \mid A \in O(n)\}$$

eine kompakte Menge in $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ ist. *(4 Punkte)*
Hinweis: $O(n)$ is kompakt. Falls $(f_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein h in L^p konvergiert, dann existiert ein $A \in O(n)$ mit $h = f_A$

Aufgabe 4.
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$. Beweisen Sie, dass jede beschränkte Menge in $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ präkompakt in $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ ist. *(4 Punkte)*