# Übungen zur Maß- und Integrationstheorie

Blatt 10
Abgabe: Freitag, 29.01.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

**Aufgabe 1** (Bemerkung 12.1).
*a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $g\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}$-messbare, nicht-negative Abbildung. Sei $\nu := g \cdot \mu$ definiert durch*

$$\nu(A) := (g \cdot \mu)(A) := \int_A g \, \mathrm{d}\mu$$

*für alle $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $\nu$ wieder ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.* *(2 Punkte)*
*b) Beweisen Sie, dass eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ genau dann $(g \cdot \mu)$-integrierbar ist wenn $f \cdot g$ $\mu$-integrierbar ist und dass in diesem Fall*

$$\int f \cdot g \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}(g \cdot \mu)$$

*gilt.* *(2 Punkte)*

**Aufgabe 2.**
*Sei $d \in \mathbb{N}$, sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge. Bemerke, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definiert ist als die kleinste $\sigma$-Algebra, die alle offenen Mengen des $\mathbb{R}^d$ enthält. Wir definieren $\mathcal{B}(U)$ als die kleinste $\sigma$-Algebra, die alle offenen Mengen von $U$ enthält. Bemerke, dass eine Menge $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen in $\mathbb{R}^d$ ist genau dann wenn die Menge $V \cap U$ offen in $U$ ist.*

*Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cap U$ definiert wie in Definition 2.6 (Spur-$\sigma$-Algebra). Beweisen Sie, dass*

$$\mathcal{B}(U) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cap U$$

*gilt.* *(2 Punkte)*
*Hinweis: Überlegen Sie sich geeignete Erzeuger für die beiden $\sigma$-Algebren*

**Aufgabe 3.**
*Sei $d \in \mathbb{N}$, seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offene Mengen und sei $\varphi\colon U \to V$ ein $C^1$-Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$ genau dann $m$-integrierbar über $V$ ist, wenn $(f \circ \varphi)|\det D\varphi|$ $m$-integrierbar über $U$ ist und dass in diesem Fall*

$$\int_V f \, \mathrm{d}m = \int_U (f \circ \varphi)|\det D\varphi| \, \mathrm{d}m$$

*gilt.* *(2 Punkte)*

**Aufgabe 4** (Nachtrag zum Bildmaß).
*Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ ein messbarer Raum und sei $T\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$ eine $\mathcal{A}/\tilde{\mathcal{A}}$-messbare Abbildung und $T(\mu) = \mu \circ T^{-1}$ das Bildmaß von $\mu$ unter $T$. Beweisen Sie, dass eine $\tilde{\mathcal{A}}$-messbare Funktion $f\colon \tilde{\Omega} \to \bar{\mathbb{R}}$ genau dann $T(\mu)$-integrierbar ist, wenn $f \circ T$ $\mu$-integrierbar ist und dass in diesem Fall*

$$\int f \circ T \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}T(\mu)$$

*gilt.* *(2 Punkte)*