WS 2020/21
M. Röckner

Übungen zur Maß- und Integrationstheorie

Blatt 2
Abgabe: Freitag, 13.11.2020
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.

(a) Sei X eine Menge und μ_1^*, μ_2^* zwei äußere Maße auf X. Zeige dass $\mu_1^* + \mu_2^*$ (definiert durch $(\mu_1^* + \mu_2^*)(A) = \mu_1^*(A) + \mu_2^*(A)$) ein äußeres Maß auf X ist. *(2 Punkte)*

(b) Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$. Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Zeige dass

$$\mathcal{P}(Y) \to [0,\infty], \quad B \mapsto \mu^*(f^{-1}(B))$$

ein äußeres Maß auf Y ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2.

Seien $(K_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ mit

$$\bigcap_{n=1}^{N} K_n \neq \emptyset, \quad \forall N \geqslant 1.$$

Zeige, dass

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3.

Sei m das d-dimensionale Lebesguemaß. Zeige: Für eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

(a) $m^*(N) = 0$

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Folge von Quadern $(]a_n, b_n[)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{d} |b_{n,i} - a_{n,i}| < \varepsilon$, wobei $a_n = (a_{n,1}, ..., a_{n,d}) \in \mathbb{R}^d$ und $b_n = (b_{n,1}, ..., b_{n,d}) \in \mathbb{R}^d$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass Mengen mit leerem Inneren und Mengen mit Lebesgue-Maß Null ***nicht*** *dasselbe sind.*
Sei m das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ und m^* das dazu assozierte äußere Maß. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge mit nichtleerem Inneren ($\mathring{A} \neq \emptyset$) zeige dass dann $m^*(A) > 0$ gilt.
Wir konstruieren die Smith-Volterra-Cantor-Menge wie folgt.

$$S_0 := [0,1]$$

$$S_1 := \left[0, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right]$$

Beim n-ten Schritt entfernen wir jeweils ein Intervall der Länge $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ aus der Mitte von jedem Interval. Also

$$S_2 := \left[0, \frac{5}{32}\right] \cup \left[\frac{7}{32}, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, \frac{25}{32}\right] \cup \left[\frac{27}{32}, 1\right].$$

Oder formal:
Für $S_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{2^n-1}[a_k, b_k]$ mit $0 = a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_{2^n-1} \leqslant b_{2^n-1} = 1$ definieren wir induktiv

$$S_n := \bigcup_{k=1}^{2^n-1} \left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{1}{2^{2n+1}}\right] \cup \left[\frac{a_k + b_k}{2} + \frac{1}{2^{2n+1}}, b_k\right].$$

Die Smith-Volterra-Cantor-Menge (SVCM) ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Zeige, dass

(i) Die Smith-Volterra-Cantor-Menge ist abgeschlossen

(ii) Die Smith-Volterra-Cantor-Menge hat leeres Innere

(iii) Die Smith-Volterra-Cantor-Menge hat strikt positives Lebesgue-Maß

(4 Punkte)