WS 2020/21
M. Röckner

Übungen zur Maß- und Integrationstheorie

Blatt 4
Abgabe: Freitag, 27.11.2020
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.

Sei $d \in \mathbb{N}$ und $m\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \bar{\mathbb{R}}$ das d-dimensionale Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Zeigen Sie, dass jede abzählbare Untermenge des $\mathbb{R}^d$ eine m-Nullmenge ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 2.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ seine Vervollständigung. Sei $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}$ messbare Funktion und $g\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion mit $f = g$ μ-f.ü.. Zeigen Sie, dass g $\tilde{\mathcal{A}}$-messbar ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 3.

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume und $T\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\{T^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{A}_2\}$$

die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω_1 ist, sodass T $\mathcal{A}/\mathcal{A}_2$-messbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\{B \subseteq \Omega_2 \mid T^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$$

die größte σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω_2 ist, sodass T $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}$-messbar ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4 (Faktorisierungssatz für messbare Funktionen)**.**

Sei X eine Menge und $(Y, \mathcal{A}')$ ein Messraum. Sei $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A} := \{\varphi^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{A}'\}$ (vgl. Aufgabe 3).
Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ genau dann $\mathcal{A}$ messbar ist, wenn eine $\mathcal{A}'$-messbare Funktion $g\colon Y \to \mathbb{R}$ existiert mit $f = g \circ \varphi$.

(3 Punkte)