WiSe 2021/22
Prof. Dr. Michael Röckner und Dr. Andre Schenke

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 10
Abgabe: **Donnerstag**, 23.12.2021, 18:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(Aufgaben(teile), die mit einem "" gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.)*

Aufgabe 38. (Satz 2.6.8, Bemerkung 2.6.9) (2 + 1 + 1 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilung

$$\mu = \frac{1}{Z} \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{j^3(\log(j))^2},$$

wobei Z eine Konstante und ε_j die Dirac-Verteilung im Punkt $\{j\}$ sei.

(a) Zeigen Sie, dass $X \in \mathcal{L}^p$ für $p \in]0, 2]$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $X \notin \mathcal{L}^p$ für $p > 2$ gilt.

(c) Konstruieren Sie daraus ein Beispiel, welches zeigt, dass die Lyapunov-Bedingung (Lya) nicht so allgemein ist wie die Lindeberg-Bedingung (L).

Aufgabe 39. (ZGE und Feller-Bedingung) (4 Punkte)
Finden Sie ein Beispiel für eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, die war die ZGE haben, aber die Feller-Bedingung und damit die Lindeberg-Bedingung **nicht** erfüllen.

Aufgabe 40. (Monotone Klassen für trigonometrische Funktionen) (1 + 1,5 + 1,5 Punkte)
Betrachten Sie

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \{f_u \mid u \in \mathbb{R}\} \cap \{g_u \mid u \in \mathbb{R}\}$$

mit $f_u(x) := \cos(ux), g_u(x) := \sin(ux)$. Sei $\mathcal{M}$ die lineare Hülle[1] von $\widetilde{\mathcal{M}}$.

(a) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier Elemente aus $\mathcal{M}$ wieder aus $\mathcal{M}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\Lambda_{[a,b]} = [a, b]$ ist, wobei

$$\Lambda_{[a,b]} := \{y \in \mathbb{R} \mid g_q(y) \in g_q([a, b]) \ \forall q \in \mathbb{Q}\}.$$

(c) Folgern Sie aus (b), dass $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 41. (Wiederholung Satz 1.11.11 und Satz 2.5.3) (4 Punkte)
Beweisen Sie ausführlich Satz 2.5.3 für den Fall $n = 1$ unter Verwendung des Satzes über monotone Klassen und Aufgabe 40.

---

[1] D.h. die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus $\widetilde{\mathcal{M}}$.