WiSe 2021/22
Prof. Dr. Michael Röckner und Dr. Andre Schenke

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 12
Abgabe: Freitag, 21.01.2022, 12:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(Aufgaben(teile), die mit einem "" gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.)*

Aufgabe 48. (für "$\Leftarrow$" nutzen Sie Aufgabe 27) (4 Punkte)
Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Die **Laplace-Transformierte** $Z\colon \mathbb{R} \to (0, \infty]$ von X ist definiert durch

$$Z(\lambda) := \mathbb{E}\left[\exp(\lambda X)\right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent ist:

(i) Z ist in einer Umgebung von 0 (also auf einem Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$]) endlich.

(ii) Es existieren $a < \infty$, $b > 0$, so dass gilt

$$P[|X| \geqslant t] \leqslant a \exp(-bt), \quad t \geqslant 0.$$

Aufgabe 49. (Satz 3.3.1 — Ratenfunktionen berechnen) (1 + 1,5 + 1,5 Punkte)
Es sei $U(x) = x$. In der Situation von Satz 3.3.1 wissen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant m\right] = -H(\mu_{\lambda(m)}|\mu) = -I(m)$$

für die **Ratenfunktion** $I\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$. Aus Satz 3.2.7 (ii) wissen wir, dass außerdem für $m \in m(\mathring{\Lambda})$ die Darstellung

$$I(m) = H(\mu_{\lambda(m)}|\mu) = \max_{\tilde{\lambda}\in\mathring{\Lambda}} \left(\tilde{\lambda} m(\lambda(m)) - \log Z(\tilde{\lambda})\right) = \max_{\tilde{\lambda}\in\mathring{\Lambda}} \left(\tilde{\lambda} m - \log Z(\tilde{\lambda})\right).$$

Allgemeiner gilt (so dass auch $I(m) = \infty$ sein kann), dass I die **Legendre-Transformierte** von $\log Z(\lambda)$ ist:

$$I(m) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left(\lambda m - \log Z(\lambda)\right).$$

Nutzen Sie diese Formel, um die Ratenfunktion für die folgenden Verteilungen zu berechnen:

(a) Dirac-Verteilung ε_a, $a \in \mathbb{R}$;

(b) $\mathrm{Exp}(\alpha)$, die Exponentialverteilung mit Parameter $\alpha > 0$;

(c) $N(m_0, \sigma^2)$.

Überprüfen Sie außerdem in jedem dieser Fälle, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

- $I(m) = 0 \Leftrightarrow m = \mathbb{E}X_1$;
- Auf der Menge $\{I < \infty\}^\circ$ ist I unendlich oft differenzierbar;
- Wenn $\{I < \infty\}^\circ \neq \emptyset$, gilt $I''(\mathbb{E}X_1) = \frac{1}{\sigma^2}$.

(d)* Untersuchen Sie ebenfalls die Poissonverteilung mit Parameter α wie oben.

Aufgabe 50. (1+3 Punkte)
Sei S ein separabler, metrischer Raum mit Metrik d. Betrachten Sie $X_1, X_2, \dots, X_n$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in S.

(a) Zeigen Sie, dass

$$d_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} d(x_i, y_i)$$

eine Metrik auf S^n ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon \Omega &\to S^n \\ \omega &\mapsto \varphi(\omega) := (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{aligned}$$

messbar bezüglich der durch die Metrik d_n induzierten Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(S^n)$ auf S^n ist.

Aufgabe 51. (mit Aufgabe 50, Bemerkung 3.5.2) (3+1 Punkte)
Sei S ein separabler, metrischer Raum mit Metrik d. Betrachten Sie $X_1, X_2, \dots, X_n$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in S.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \chi_n\colon S^n &\to \mathcal{M}_1(S) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \chi_n(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{x_i} \end{aligned}$$

stetig ist.

(d) Folgern Sie aus den Teilen (b) und (c), dass

$$\omega \mapsto \xi_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{X_i(\omega)}$$

messbar bezüglich der durch die Metrik d_n induzierten Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(S^n)$ auf S^n ist.