Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 4
Abgabe: Freitag, 12.11.2021, 12:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(Aufgaben(teile), die mit einem "" gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.)*

Aufgabe 13. (vgl. Satz 1.6.7) (3 Punkte)
Beweisen Sie für $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{L}^2$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen die folgende Gleichheit von Bienaymé:

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i).$$

Aufgabe 14. (Gesetz der großen Zahlen) (5 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X_n \in \mathcal{L}^2$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit der Eigenschaft

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_1] \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Sei zudem eine Funktion $r \colon \{0, 1, 2, \ldots\} \to [0, \infty)$ gegeben mit

$$|\operatorname{cov}(X_n, X_m)| \leqslant r(|n-m|) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{r(k)}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right) = 0. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Aufgabe 15. (vgl. Bemerkung 1.8.3)
Seien $\Omega = [0,1[$ und P das auf Ω eingeschränkte Lebesgue-Maß, definiert auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1[)$. Definiert seien

$$A_{2^m+k} := \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right[\quad \text{für } k \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}, m \in \mathbb{N}_0 \text{ und } Y_n := 1_{A_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

1. Zeigen Sie, dass Y_n zwar in $\mathcal{L}^1$ konvergiert, aber **nicht** P-f.s. (2 Punkte)
2. Geben Sie eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an, die zwar P-f.s. konvergiert, aber **nicht** in $\mathcal{L}^1$. (2 Punkte)

Aufgabe 16. (Satz 1.8.4 (i) $\Rightarrow$ (ii) + Lemma 1.8.8) (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$ eine Folge von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\lim_n X_n = X$ in $\mathcal{L}^1$ für ein $X \in \mathcal{L}^1$. Zeigen Sie, dass dann $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar ist.