Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintterersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 4

Aufgabe 1. Betrachten Sie die folgenden Mengen M und Operationen

$$\circ : M \times M \to M.$$

Welche Operationen sind assoziativ?

(1) $M = \mathbb{N}$, $x \circ y := x^y$,
(2) $M = \mathbb{N}$, $x \circ y := \mathrm{ggT}(x, y)$ (hier bezeichnet $\mathrm{ggT}(x, y)$ den *größten gemeinsamen Teiler* von x und y),
(3) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y := x - y$,
(4) $M = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $x \circ y := x/y$.

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren auf $\mathbb{Z}/(n)$, den ganzen Zahlen modulo n (vergleiche Präsenzübungsblatt 3, Aufgabe 2), eine zusätzliche Operation $\cdot_n$ wie folgt:

$$\cdot_n : \mathbb{Z}/(n) \times \mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z}/(n)$$
$$([r]_n, [s]_n) \mapsto [rs]_n.$$

Zeigen Sie, dass auch diese *Multiplikation modulo n* wohldefiniert, d.h. von den Repräsentanten r und s unabhängig ist, und zusammen mit $+_n$ auf $\mathbb{Z}/(n)$ die Struktur eines Ringes definiert.

Bestimmen Sie die Verknüpfungstafeln der Operationen $+_n$ und $\cdot_n$ der Ringe $(\mathbb{Z}/(n), +_n, \cdot_n)$ für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Genau dann ist $(\mathbb{Z}/(n), +_n, \cdot_n)$ ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.