Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 5

Gegeben seien ein Körper K und ein K-Vektorräume V.

Aufgabe 1. Seien $U_1, U_2 \leq V$ zwei K-lineare Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(1) Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ist stets ein K-linearer Unterraum von V.
(2) Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein K-linearer Unterraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Aufgabe 2. Sei W ein weiterer K-Vektorraum. Zeigen Sie: Die Menge $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ aller K-linearen Abbildungen von V nach W ist ein K-linearer Unterraum des K-Vektorraums $\mathrm{Abb}(V, W)$.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Vektoren

(1) $(2, 0, -2), (2, -1, 1), (0, 2, -1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$,
(2) $(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, -1)$ im $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^3$,
(3) $(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, -1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$,
(4) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{11}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$,
(5) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{11}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$,
(6) $(i + 1, i - 1), (-1 + i, -1 - i)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$,
(7) $(i + 1, i - 1), (-1 + i, -1 - i)$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$.

Stellen Sie in jedem Fall fest, ob die Vektoren ein Erzeugendensystem des jeweiligen Vektorraums bilden und ob sie linear unabhängig über dem jeweiligen Grundkörper sind.