Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 6

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Sei V ein K-Vektorraum, und W ein K-linearer Unterraum von V. Definiere die folgende Relation $R \subseteq V \times V$: Für $v_1, v_2 \in V$ sei $(v_1, v_2) \in R$ genau dann, wenn $v_1 - v_2 \in W$.

(1) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen von R. Welche Klassen sind K-lineare Unterräume von V?

Aufgabe 2. Sei

$$K[t] := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} k_i t^i \mid k_i \in K \text{ für } i \in \mathbb{N}_0,\ k_i = 0 \text{ für fast alle } i \right\}$$

die Menge der *Polynome in der Unbestimmten* t *mit Koeffizienten in* K. Wir definieren:

$$\begin{array}{cc} + : K[t] \times K[t] \to K[t] & \cdot : K \times K[t] \to K[t] \\ \left(\sum_i k_i t^i, \sum_i k_i' t^i \right) \to \sum_i (k_i + k_i') t^i & \left(k, \sum_i k_i t^i \right) \to \sum_i k k_i t^i. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $K[t]$ mit diesen Operationen ein K-Vektorraum ist. Bestimmen Sie eine K-Basis von $K[t]$. Ist $\dim_K(K[t]) < \infty$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$t^n K[t] := \{t^n f(t) \mid f(t) \in K[t]\}.$$

Zeigen Sie, dass $t^n K[t]$ ein K-linearer Unterraum von $K[t]$ ist. Bestimmen Sie eine K-Basis des Quotientenraumes $K[t]/t^n K[t]$. Zeigen Sie, dass $\dim_K(K[t]/t^n K[t]) = n$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{A} := \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, K) = \{f \mid f : \mathbb{N}_0 \to K\}$. Wir definieren

$$\int : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad f \mapsto \left(n \mapsto \sum_{i=0}^{n} f(i) \right) =: \int f$$

und

$$\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad f \mapsto (n \mapsto f(n) - f(n-1)) =: \Delta f.$$

(Hier ist, per Konvention, $f(-1) = 0$ für alle $f \in \mathcal{A}$.) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\int$ und Δ K-linear sind und dass

$$\Delta \circ \int = \int \circ \Delta = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$$

gilt. Sei nun

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{A} \mid |\{i \in \mathbb{N}_0 \mid f(i) \neq 0\}| < \infty\}$$

die Teilmenge aller Abbildungen in $\mathcal{A}$ mit *endlichem Träger*; siehe Übungsblatt 4, Aufgabe 3. Bezeichne mit $\int|_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$, $f \mapsto \int f$, die *Einschränkung* von $\int$ auf $\mathcal{F}$. Analog ist $\Delta|_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ definiert. Gilt $\mathrm{im}(\Delta|_{\mathcal{F}}) \subseteq \mathcal{F}$? Gilt $\mathrm{im}(\int|_{\mathcal{F}}) \subseteq \mathcal{F}$? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.