Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 10

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 21. Juni 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{O}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Hinweis: Wir hatten in der Vorlesung bereits die Elemente der Untergruppe SO_2 charakterisiert. Es reicht also, die Elemente von $\mathrm{O}_2 \setminus \mathrm{SO}_2$ zu bestimmen. Orientieren Sie sich dabei am Beweis des in der Vorlesung bewiesenen Satzes zur Beschreibung der SO_2.

Aufgabe 2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 66 & -18\sqrt{6} & 10\sqrt{18} \\ 6\sqrt{6} & 72 & 15\sqrt{12} \\ -14\sqrt{18} & -9\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie, dass A unitär ist. Bestimmen Sie eine unitäre Matrix U derart, dass U^*AU diagonal ist, und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie: Ist $A^2 = \pm \mathrm{Id}_n$, so ist A diagonalisierbar, aber im Allgemeinen nicht normal.

Aufgabe 4. Sei V ein unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

(1) f ist genau dann selbstadjungiert, wenn f normal ist und alle Eigenwerte von f reell sind.
(2) Ist f normal und nilpotent, so ist $f = 0$.