Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 13

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 12. Juli 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie die Invarianten-, Determinanten- und (Weierstraßschen) Elementarteiler von A, sowie

(1) die Frobeniussche Normalform,
(2) die Weierstraßsche Normalform und
(3) die Jordansche Normalform

von A.

Aufgabe 2. Sei V ein 6-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Bestimmen Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen von Endomorphismen $f \in \mathrm{End}(V)$ mit charakteristischem Polynom

$$\chi_f(X) = (X-3)^2(X-4)^4$$

und Minimalpolynom

$$\mu_f(X) = (X-3)(X-4)^2.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die größte natürliche Zahl n derart, dass zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ genau dann konjugiert sind, wenn $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ gilt. Geben Sie zwei Matrizen in $\mathrm{Mat}_{n+1}(\mathbb{C})$ an, für die dies nicht gilt.

Aufgabe 4. Gegeben sei ein Endomorphismus f eines 6-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums V mit

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= (X-1)^4(X+2)^2, \\ \mu_f(X) &= (X-1)^2(X+2)^2, \\ \dim_{\mathbb{C}}(V_1(f)) &= 3, \\ \dim_{\mathbb{C}}(V_{-2}(f)) &= 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f durch diese Daten bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von f.