Fakultät für Mathematik | Prof. Dr. Christopher Voll
Universität Bielefeld | Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 3

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 03. Mai 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Wir betrachten $V = \mathbb{R}^n$ als quadratischen Raum mit dem Standardskalarprodukt. Ergänzen Sie in den beiden folgenden Fällen die gegebenen Vektoren jeweils zu einer Orthonormalbasis des jeweiligen Vektorraums.

(1) $V = \mathbb{R}^3$, $v = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$,
(2) $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$, $v_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$.

Aufgabe 2. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Auf dem Präsenzübungsblatt 3 hatten Sie gezeigt, dass

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V ist.

(1) Zeigen Sie, dass ϕ positiv definit ist.
(2) Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ an, um eine Orthonormalbasis von V bezüglich ϕ zu berechnen.

Aufgabe 3. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ heißt *orthogonal* wenn $A^{-1} = A^{\mathrm{t}}$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(1) Die Summe zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.
(2) Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.
(3) Die Transponierte einer orthogonalen Matrix ist orthogonal.
(4) Die Inverse einer orthogonalen Matrix ist orthogonal.
(5) Ist $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, so ist $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
(6) Ist $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und gilt $\det(A) \in \{-1, 1\}$, so ist A orthogonal.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch, d.h. $A = -A^{\mathrm{t}}$, derart, dass $\det(\mathrm{Id}_n + A) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$(\mathrm{Id}_n - A)(\mathrm{Id}_n + A)^{-1}$$

orthogonal ist.