Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 4

Abgabe bis 10:00 Uhr am **Mittwoch, den 09. Mai 2018**, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Bestimmen Sie das characteristische Polynom χ_A derMatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}),$$

sowie sämtliche Eigenwerte und Eigenräume von A. Berechnen Sie, für jeden Eigenwert λ von A,

(1) die geometrische Vielfachheit $\dim V_\lambda(f_A)$ sowie
(2) die algebraische Vielfachheit $m_{f_A}(\lambda)$.

Sei K ein Körper.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $n > 0$ gibt derart, dass

$$f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{mal}} = 0.$$

Zeigen Sie, dass ein nilpotenter Endomorphismus von V stets genau einen Eigenwert hat, nämlich 0.

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne S_n die symmetrische Gruppe vom Grad n.

(1) Seien $\tau \in S_n$ der n-Zykel $\tau = (1\,2\ldots n)$ und $P_\tau \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die zugehörige Permutationsmatrix. Zeigen Sie, dass
$$\chi_{P_\tau}(X) = X^n - 1.$$
(2) Sei nun $\sigma \in S_n$ beliebig, und $P_\sigma \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die zugehörige Permutationsmatrix. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_{P_σ}. Hinweis: Schreiben Sie σ als Produkt von Zykeln, und wenden Sie Teil 1 der Aufgabe an.

Aufgabe 4. Seien $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $B \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass

$$\chi_A = \chi_{BAB^{-1}}$$

gilt. (Man sagt daher, dass das charakteristische Polynom einer Matrix A *invariant unter Konjugation* sei.)