Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 6

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 24. Mai 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

Aufgabe 1. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie: Ist jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f, so ist f eine *Homothetie*, d.h. es gibt ein $\lambda \in K$ derart, dass $f = \lambda\,\mathrm{id}$.

Aufgabe 2. Zur Erinnerung: Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt *nilpotent* wenn $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\dim V = n$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) f ist nilpotent.
(2) $\chi_f = X^n$.
(3) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, bezüglich derer f durch eine *strikte* obere Dreiecksmatrix dargestellt ist, d.h. $(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))_{ij} = 0$ falls $i \geq j$.
(4) $f^n = 0$.

Aufgabe 3. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt *nilpotent* wenn $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Man zeige:

(1) $\mathrm{Sp}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0$.
(2) $\det(\mathrm{Id}_n - A) = \det(\mathrm{Id}_n + A) = 1$.
(3) Ist $B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit A vertauschbar (d.h. gilt $AB = BA$), so gilt $\det(A + B) = \det(B)$.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

(1) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A und das Minimalpolynom μ_A von A.
(2) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie ihre geometrischen und algebraischen Vielfachheiten.
(3) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine diagonalisierende Matrix, d.h. eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ derart, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
(4) Ist A trigonalisierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine trigonalisierende Matrix, d.h. eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ derart, dass $T^{-1}AT$ eine obere Dreiecksmatrix ist.