Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 7

Abgabe bis 10:00 Uhr am **Mittwoch, den 30. Mai 2018**, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

(1) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht.
(2) Geben Sie eine orthogonale Matrix $S \in O_3$ an, für die $S^{\mathrm{t}}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
(3) Bestimmen Sie die Signatur der quadratischen Form $q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper der Charakteristik ungleich 2, d.h. $2 \neq 0$ in K. Sei

$$f : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K), \quad A \mapsto A^{\mathrm{t}}$$

die K-lineare Abbildung, die einer Matrix A ihre Transponierte A^{t} zuordnet.

(1) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren sowie das charakteristische und Minimalpolynom von f.
(2) Besitzt $\mathrm{Mat}_n(K)$ eine Eigenbasis bezüglich f?

Aufgabe 3. Seien K ein beliebiger Körper und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix über K. Zeigen Sie: Es existiert ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad $\deg(f) < n$ derart, dass $f(A) = A^{-1}$.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots + a_{n-1}X + a_n \in \mathbb{R}[X].$$

(Beachten Sie, dass $a_0 = 1$). Zeigen Sie, dass für den Rang $\mathrm{rk}(A)$ von A gilt:

$$\mathrm{rk}(A) = \max\{i \in \{0, 1, \ldots, n\} \mid a_i \neq 0\}.$$