Fakultät für Mathematik | Prof. Dr. Christopher Voll
Universität Bielefeld | Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 8

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 07. Juni 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ über einem Körper K heissen *ähnlich* oder *konjugiert zueinander*, falls ein $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $T^{-1}AT = B$.

Zeigen Sie: Genau dann sind zwei symmetrische Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ konjugiert zueinander, wenn sie über O_n zueinander konjugiert sind, d.h. wenn es ein $T \in O_n$ gibt mit $T^{-1}AT = B$.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die durch das reelle Polynom

$X_1^2 - 4\sqrt{6}X_1X_2 + 2\sqrt{2}X_1X_3 + 4\sqrt{3}X_2X_3 + 2X_3^2 + 4\sqrt{3}X_1 + 6\sqrt{2}X_2 - 2\sqrt{6}X_3 - 3$

definierte Quadrik. Bringen Sie das Polynom in Normalform, bestimmen Sie die Hauptachsen der Quadrik und beschreiben Sie die Menge ihrer reellen Punkte. Ist diese Menge kompakt?

Aufgabe 3. Sei K ein Körper. Die Abbildung

$d : K^n \times K^n \to \{0, 1, \ldots, n\}, \quad ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto \#\{i \mid x_i \neq y_i\}$

heißt Hamming[1]-Abstand. Zeigen Sie:

(1) Der Hamming-Abstand ist eine Metrik im Sinne von Definition 3.5 der Vorlesung.
(2) Der Hamming-Abstand ist translationsinvariant, d.h.
$$d(x + z, y + z) = d(x, y)$$
für alle $x, y, z \in K^n$.

Kommt der Hamming-Abstand von einer Norm (Definition 3.3) im Sinne von Lemma 3.4? Wenn ja, von welcher?

Aufgabe 4. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$d_{x_0} : X \times X \to \mathbb{R},$$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ d(x, x_0) + d(x_0, y) & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik ist. (Gelegentlich wird sie *British-Rail-* oder *SNCF-Metrik* genannt.) Ist sie translationsinvariant? Kommt sie von einer Norm?

[1] R. Hamming (1915 –1998)