Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 9

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 14. Juni 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Wir hatten in der Vorlesung die *unitäre Gruppe* $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ eingeführt. Sei $U \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Im Folgenden bezeichnen, wie gewöhnlich, $\overline{U}$ die Komplexkonjugierte, U^{t} die Transponierte und $U^* = \overline{U}^{\mathrm{t}}$ die Transponiert-konjugierte von U, und $(\mathbb{C}^n, \langle\, , \rangle)$ den unitären Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\, , \rangle$.

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.
(2) $U^{\mathrm{t}}\overline{U} = \mathrm{Id}_n$.
(3) $U^*U = \mathrm{Id}_n$.
(4) $UU^* = \mathrm{Id}_n$.
(5) U ist invertierbar und $U^{-1} = U^*$.
(6) Die Spalten von U bilden eine ONB von $(\mathbb{C}^n, \langle\, , \rangle)$.
(7) Die Zeilen von U bilden eine ONB von $(\mathbb{C}^n, \langle\, , \rangle)$.

Folgern Sie, dass für eine Matrix $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ stets $|\det(U)| = 1$ gilt.

Aufgabe 2. Sei V ein unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

(1) Es gibt eindeutig bestimmte selbstadjungierte Endomorphismen f_1, $f_2 \in \mathrm{End}(V)$ derart, dass $f = f_1 + if_2$.
(2) Genau dann ist f normal, wenn f_1 und f_2 miteinander vertauschen.

Aufgabe 3. Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie:

(1) Die Abbildung
$$\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathbb{C}, \quad (f, g) \mapsto \langle f, g\rangle := \mathrm{Sp}(fg^*)$$
ist ein Skalarprodukt, d.h. $(\mathrm{End}(V), \langle\, , \rangle)$ ist ein unitärer Vektorraum ist. Hinweis: Präsenzaufgabenblatt 9, Aufgabe 3.
(2) Sind $f, g \in \mathrm{End}(V)$ normal und gilt $fg = 0$, so gilt $gf = 0$.

Aufgabe 4. Sei $U \leq \mathbb{C}^4$ der von $(-1, 0, i, 1)$ und $(1, 0, 1, 0)$ erzeugte $\mathbb{C}$-lineare Unterraum. Finden Sie eine Orthonormalbasis von U bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{C}^4$. Hinweis: Gram-Schmidt.