Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Auf dem Übungsblatt 3 hatten Sie gezeigt, dass die Abbildung

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf V ist. Bestimmen Sie den Endomorphismus von V, der zur formalen 'Ableitung'

$$\Delta : V \to V, \quad \sum_{i=0}^{2} a_i X^i \mapsto \sum_{i=1}^{2} a_i X^{i-1}$$

adjungiert ist bezüglich ϕ.

Aufgabe 2. Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform derart, dass $\beta(b_i, b_j) > 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Folgt daraus, dass β ein Skalarprodukt ist? Geben Sie gegebenenfalls einen Beweis oder ein Gegenbeispiel. Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $n = 1$ und $n \geq 2$ separat.

Aufgabe 3. Seien V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $f, g \in \mathrm{End}(V)$ zwei selbstadjungierte Endormorphismen. Zeigen Sie: Genau dann ist $f \circ g$ selbstadjungiert, wenn $f \circ g = g \circ f$ gilt.