Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 11

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(1) Für jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist AA^* hermite'sch und positiv definit.
(2) Zu jeder positiv definiten hermite'schen Matrix $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gibt es eine positiv definite hermite'sche Matrix $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $C^2 = B$.

Aufgabe 2. ("Polarzerlegung") Zu jedem $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gibt es eine positiv definite hermite'sche Matrix P und eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ derart, dass

$$A = PU.$$

(Hinweis: Aufgabe 1.) Interpretieren Sie diese Zerlegung geometrisch.

Aufgabe 3. Sei $C_2 \subset \mathbb{R}^2$ die konvexe Hülle der Vektoren

$$e_1 + e_2, \quad e_1 - e_2, \quad -e_1 + e_2, \quad -e_1 - e_2.$$

Bestimmen Sie die Teilmenge $\mathcal{S}_2 \subset \mathrm{O}_2$ der orthogonalen Matrizen, die C_2 invariant lassen. Zeigen Sie, dass diese "Symmetriegruppe" $\mathcal{S}_2$ des Würfels C_2 eine Untergruppe der Gruppe O_2 der Ordnung 8 ist. Ist sie abelsch?