Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 12

In diesem Übungsblatt geht es um den sogenannten *Euklidischen*[1] *Algorithmus*. Sei R ein euklidischer Ring mit euklidischer Normfunktion $n : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$. Seien $a, b \in R$ mit $a \neq 0$, und $q, r \in R$ mit

$$b = qa + r, \quad q, r \in R, \quad r = 0 \text{ oder } n(r) < n(a).$$

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(b, a) = \mathrm{ggT}(a, r)$ gilt.

Definiere eine Folge $(r_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Elementen aus R wie folgt: Setze $r_0 = b, r_1 = a, r_2 = r$. Ist $r_i = 0$, so sei $r_{i+1} = 0$. Ist $r_i \neq 0$, so schreibe

$$r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1}, \quad q_i, r_{i+1} \in R, \quad n(r_{i+1}) < n(r_i).$$

(Beachten Sie, dass r_{i+1} dadurch *eindeutig* festgelegt ist.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $r_i = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Die Folge (r_i) "bricht also ab". Sei r_n das letzte von 0 verschiedene Element. Schreibe

$$\begin{aligned} r_0 = b = qa + r &= q_1 r_1 + r_2, \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3, \\ &\dots \\ r_{n-1} &= q_n r_n + 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $r_n = \mathrm{ggT}(a, b)$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $R = \mathbb{Z}$ mit euklidischer Normfunktion $n = |\ |$. Benutzen Sie den euklidischen Algorithmus, um

$$d := \mathrm{ggT}(238, 35)$$

zu berechnen. Finden Sie ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$238x + 35y = d.$$

[1] Euklid von Alexandria, ca. 360 v. Chr. bis ca. 280 v. Chr.