Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 14

Aufgabe 1. Seien K ein beliebiger Körper und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix in Jordanscher Normalform, mit Minimalpolynom $\mu_A(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \alpha_i)^{m_i}$. Hierbei seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A. Zeigen Sie:

(1) Für jedes $i = 1, \ldots, s$ ist m_i die Größe des größten Jordanblocks von A zum Eigenwert α_i.

(2) Wenn A die Gestalt
$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
hat für Matrizen $B \in \mathrm{Mat}_j(K)$ und $C \in \mathrm{Mat}_{n-j}(K)$ für ein $j = 1, \ldots, n$, dann gilt
$$\mu_A = \mathrm{kgV}(\mu_B, \mu_C),$$
das heisst das Minimalpolynom μ_A ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalpolynome μ_B und μ_C.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen komplexer Matrizen A mit
$$\mathrm{rk}(A) = 4, \quad \mu_A(X) = X^3, \quad \chi_A(X) = X^7.$$

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
einmal als Element von $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ und einmal als Element von $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_2)$, wobei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen ist.

(1) Zeigen Sie, dass A in beiden Fällen konjugiert ist zu einer Matrix in Jordanscher Normalform. (Hinweis: Betrachten Sie das charakteristische Polynom.)

(2) Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalformen.