Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 4

Aufgabe 1. Seien K ein Körper und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_2(K)$. Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom

$$\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Sp}(A)X + \det(A)$$

gilt, wobei $\mathrm{Sp}(A) = a_{11} + a_{22}$ die Spur von A bezeichnet. Können Sie diese Beobachtung auf beliebige $n \times n$-Matrizen verallgemeinern?

Aufgabe 2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

(1) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von A.
(2) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt.
(3) Zeigen Sie, dass es eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ und eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ gibt derart, dass

$$D = T^{-1}AT.$$

Aufgabe 3. Sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie B^{25}.

(Hinweis: In der Vorlesung hatten wir bereits die Eigenwerte und -räume von B bestimmt. Nutzen Sie diese Beschreibung, um B mithilfe geeigneter Basiswechselmatrizen auf Diagonalgestalt zu bringen.)