Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2

Präsenzübungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei $V = C^\infty(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Weiter sei

$$\Delta : V \to V, \quad f \mapsto f'$$

die Abbildung, die einer Funktion f ihre Ableitung f' zuordnet. Zeigen Sie:

(1) $\Delta \in \mathrm{End}(V)$.
(2) Jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von Δ. Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f_\lambda(x) := e^{\lambda x}$.
(3) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in V_\lambda(\Delta)$ ist $f f_{-\lambda}$ konstant. Folgern Sie, dass $\dim_{\mathbb{R}} V_\lambda(\Delta) = 1$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Besitzt V eine Eigenbasis bezüglich Δ?

Aufgabe 2. Geben Sie ein Beispiel eines Endomorphismus eines 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums, der keine Eigenvektoren hat. Zeigen Sie weiter, dass jeder Endomorphismus eines 3-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums mindestens einen Eigenvektor besitzt.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A von A.
(2) Bestimmen Sie die Eigenwerte und -räume von A als Element von $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$.
(3) Bestimmen Sie die Eigenwerte und -räume von A als Element von $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$.