Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 7

Aufgabe 1. Trigonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Im Folgenden seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Aufgabe 2. Seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ derart, dass

$$f \circ g = g \circ f$$

("f und g vertauschen"). Zeigen Sie, dass jeder Eigenraum von f invariant unter g ist.

Es sei I eine beliebige Menge. Eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Endomorphismen von V heißt *simultan diagonalisierbar*, wenn es eine Basis von V gibt, die simultan Eigenbasis für jedes f_i, $i \in I$ ist, oder, äquivalenterweise, die Matrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_i)$ alle Diagonalmatrizen sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Jede Familie $(f_i)_{i\in I}$ paarweise vertauschender, diagonalisierbarer Endomorphismen von V (d.h. jeder der f_i ist diagonalisierbar und $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ für alle $i, j \in I$) ist simultan diagonalisierbar.

Hinweis: Ohne Einschränkung gibt es in der Familie einen Endomorphismus f, der keine Homothetie ist. Da f diagonalisierbar ist, ist

$$V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}(f)$$

für die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von f. Argumentieren Sie nun mit vollständiger Induktion, unter Verwendung von Aufgabe 2 oben und Aufgabe 3 auf Präsenzübungsblatt 6.